

## 水車吸出し管内に発生する渦心の挙動について

水谷 充・村上 光 清

### On the Motion of a Vortex Core in a Water-Turbine Draft Tube

Mitsuru MIZUTANI and Mitsukiyo MURAKAMI

The vibration in the draft tube of a water turbine becomes most severe when the turbine is running near one-half of its normal load. This is caused principally by the eccentric vortex core rotating around the center of the draft tube. This paper describes the results of a theoretical investigation of frequency and force of the periodic vibration caused by the eccentric vortex core. The vortex core can be stable and is concentric with the draft tube when the radius ratio of the core to the draft tube is less than 0.577. When the ratio grows beyond 0.577, the vortex core becomes unstable and takes an eccentric position about the tube axis. The eccentricity of the vortex core can not be determined theoretically and its magnitude is estimated on the basis of the experimental results obtained from a model draft tube. The vortex core is seen to rotate about the tube axis and to move along the boundary layer of the draft tube wall.

#### 1. まえがき

フランス水車やプロペラ水車などの吸出し管を有する水車を部分負荷で運転すると羽根車を出る流れは旋回速度成分を持ち、吸出し管内の流れは旋回流れとなる。この旋回流れが強くなると吸出し管内の流れは不安定になり規則的振動を含んだ激しい振動が発生し、吸出し管や水車本体、発電機にもこの振動が伝わり、電力動揺<sup>1)</sup>や発電所事故の原因ともなる。

この吸出し管の振動には多くの周波数成分が含まれておりその原因も種々のものが考えられるが、吸出し管内の中心部に形成される渦心が偏心し振れまわることにより生ずる規則的な振動がその主要なものである。

この渦心の偏心による振動に関する理論的な研究は従来種々のものがある。Kelvin<sup>2)</sup>は柱状の渦心が自由旋回運動している無限に広がりを持った水中で振動している場合を解析している。またこれとほぼ同じ方法を用いて内丸、鬼頭<sup>3)</sup>が吸出し管内の振動を解析して振動数を求めているが、実測値とあまりよく一致しない。

本報告は円筒管内の渦心をともなう渦の挙動を理論的に導き、振動の発生条件、振動数、加振力等を表す一般式を求めたものである<sup>4)</sup>。実際の吸出し管の壁は必ず多少の振幅を持って振れるがこの壁面の動きは無視してある。また粘性の影響も考慮していない。

#### 2. 記号

a : 渦心の半径  
b : 偏心渦の半径位置  
c : 渦の座標  
e :  $\epsilon/R$   
Fx, Fy : x, y方向の力  
x, y : 直交座標  
z :  $= x + iy$   
i :  $i^2 = -1$   
k :  $= b/R$   
n : 周波数  
P : 圧力  
Q : 流量  
R : 吸出し管の半径

$$\alpha := a/R$$

$\varepsilon$  : 渦心の偏心量

$\lambda$  : 旋回率 (=  $(\Gamma/R)/(Q/\pi R^2)$ )

$\rho$  : 密度

$\eta, \xi$  : 極座標

$$\zeta := \xi + i\eta$$

$\Gamma$  : 循環/ $2\pi$

$\Theta$  : 複素ポテンシャル

$\Phi$  : 速度ポテンシャル

$\Psi$  : 流れ関数

### 3. 円筒管内の渦心を伴う渦の

#### 複素速度ポテンシャル

すでに述べたように吸出し管内の旋回流れの強さが大きくなると渦が管軸から偏心してその軸回りを回転する。そこで吸出し管に垂直な一断面を考え、図1のように渦心が偏心している場合の複素速度ポテンシャルを求める。管の半径を $R$ 、渦心の半径と偏心量をそれぞれ $a$ 、 $\varepsilon$ とし、点 $A'$ 、 $A$ の直角座標をそれぞれ $(-C, 0)$ 、 $(C, 0)$ とする。 $x$ 軸を基線とする $A'$ 、 $A$ 点に関する任意の点 $P$ の極座標をそれぞれ $(r_2, \theta_2)$ 、 $(r_1, \theta_1)$ とする。ここで

$$\xi = \theta_1 - \theta_2, \quad \eta = \ln(r_2/r_1)$$

とおけば

$$\eta - i\xi = \ln(r_2 e^{i\theta_2}) - \ln(r_1 e^{i\theta_1})$$

これを書き換えると

$$e^{\eta - i\xi} = \frac{Z - c}{Z + c} \quad (Z = x + iy)$$

ここでまた、 $\zeta = \xi + i\eta$ とおき上式から $Z, \bar{Z}$ を求めると

$$Z/c = i \cdot \cot(\xi/2)$$

$$\bar{Z}/c = i \cdot \cot(\bar{\xi}/2)$$

ただし $\bar{Z} = x - iy$ ,  $\bar{\xi} = \xi - i\eta$

ここで複素速度ポテンシャルとして

$$\Theta = \Phi + i\Psi = -\Gamma\zeta \quad (2)$$

を考える。

式(1), (2)より

$$\Theta = \Phi + i\Psi = 2\Gamma \cot^{-1}(iZ/c) \quad (2')$$

$$\text{ゆえに } \Phi = -\Gamma\xi, \quad \Psi = -\Gamma\eta \quad (3)$$

式(3)より $\eta$ を一定とすれば $\Psi$ が一定となり、 $\eta$  = 一定の任意の円周上を正の方向に一周すれば $\Phi$ が $2\pi\Gamma$ だけ変化するので、 $2\pi\Gamma$ がこの円に沿った渦度を表す。したがって式(2), (2)'の $\Theta$ は図1のように $\eta = \eta_2$  (半径 $R$ )の円管内の $\eta = \eta_1$  (半径 $a$ )で渦度

が $2\pi\Gamma$ なる渦心で生ずる流れの複素速度ポテンシャルを表す。

式(1)から $\xi$ を消去すれば次式を得る。

$$y^2 + (x - C \coth\eta)^2 = C^2 \operatorname{csch}^2\eta \quad (4)$$

$C, \eta$ を一定とすれば式(4)は一つの円を表す。したがって図1を参照すればつぎの関係を得る。

$$a = C \operatorname{csch}\eta_1, \quad x_1 = C \coth\eta_1,$$

$$\varepsilon = C(\coth\eta_2 - \coth\eta_1),$$

$$R = C \operatorname{csch}\eta_2, \quad x_2 = C \coth\eta_2 \quad (5)$$

これより $C$ を求めると

$$C = \sqrt{(R^2 + a^2 - \varepsilon^2)^2 - 4a^2 R^2} / 2\varepsilon \quad (6)$$

を得る。また渦中心の半径位置 $b$ は図1および式(5)により次のように表される。

$$\begin{aligned} b &= x_2 - C = \sqrt{R^2 - C^2} - C \\ &= \frac{R^2 - a^2 + \varepsilon^2 - \sqrt{(R^2 - a^2 + \varepsilon^2)^2 - 4\varepsilon^2 R^2}}{2\varepsilon} \end{aligned} \quad (7)$$

渦心の半径 $a$ 、偏心量 $\varepsilon$ および渦の半径位置 $b$ の関係は式(7)により示される。

### 4. 振動数

円筒内の渦は図1に示すようにその鏡像の渦による誘導速度のため運動する。渦の中心 $A$ の周方向速度は

$$v_A = \Gamma/2C \quad (8)$$

であり半径方向速度はない。したがって渦は半径 $b$ の円周上を周速度 $v_A$ でまわることになる。したがって回転数 $n$ は

$$n = v_A/2\pi b = \Gamma/(2C \cdot 2\pi b) \quad (9)$$

ここで $\varepsilon/R = e$ ,  $a/R = \alpha$ ,  $b/R = k$ とおき、式(9)に式(7)を用いると式(9)は次のようになる。

$$\begin{aligned} n &= \frac{\Gamma}{2\pi R^2} \cdot \frac{1}{1 - k^2}, \\ k &= \frac{1 - \alpha^2 + e^2 - \sqrt{(1 - \alpha^2 + e^2)^2 - 4e^2}}{2e} \end{aligned} \quad (10)$$

ただし $\alpha + e \leq 1$

渦心の半径、渦度、および偏心量がわかれば式(10)より振れまわりの周波数を求めることができる。

### 5. 振動力

渦心の偏心振れまわりにより生ずる吸出し管への加振力および管内の圧力変動を求める。

#### 5・1 渦心に作用する力

一断面内を偏心して旋回する渦心に作用する力を考える。式(2)より

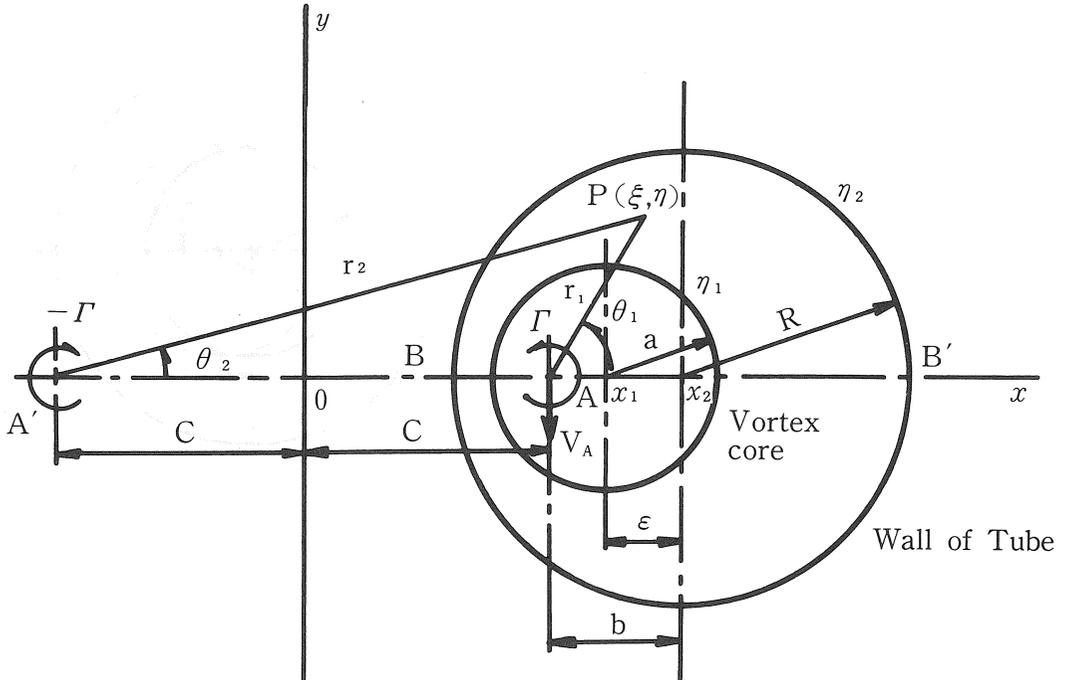


図1 吸出し管水平断面内の偏心した渦心

$$\frac{d\Theta}{dz} = \frac{i\Gamma}{Z-C} + \frac{-i\Gamma}{Z+C} = \frac{2i\Gamma C}{Z^2-C^2} \quad (11)$$

したがって  $x, y$  方向の速度を  $u, v$  とすれば

$$d\Theta/dz = -u+iv \quad (12)$$

管軸方向に単位長さを取りその部分では管の半径が一定とすれば、渦心に作用する力の  $x, y$  成分、 $F_x, F_y$  は Blasius の定理より

$$F_x - iF_y = i(\rho/2) \oint (d\Theta/dz)^2 dz$$

上式に式(11)を代入すれば

$$F_x = -2\rho\pi\Gamma^2/C, F_y = 0$$

式(6)の関係を用いて書き直すと次式を得る。

$$F_x = -\pi\rho\Gamma^2 \cdot \frac{2\varepsilon}{\sqrt{(R^2+a^2-\varepsilon^2)^2-4a^2R^2}}, F_y = 0 \quad (13)$$

上式より渦心には偏心を大きくするような方向に力が作用することがわかる。

### 5・2 吸出し管に作用する力

渦心が管軸より偏心した状態において、水が吸出し管の管端を流出すれば流れの状態変化に伴う力が管端に作用する。図1に示すように偏心渦  $\Gamma$  の鏡像である  $A'$  点の渦  $-\Gamma$  は管端において吸出し管壁が

なくなるため消失する。この鏡像の渦の消失にとまらぬ運動量の変化を求める。管内の軸流速度  $v_z$  は簡単のため渦心内は0、渦心と管壁間は一定と仮定する。

式(11)において  $-\Gamma/(Z+C)$  は  $A'$  点の  $-\Gamma$  による誘導速度であるから、 $-\Gamma$  による誘導速度を  $u', v'$  とすれば

$$\frac{-i\Gamma}{Z+C} = -u'+iv' \quad (14)$$

したがって  $-\Gamma$  の消失により生じる水の反力の  $x, y$  成分は

$$F_x = \rho v_z \iint (-u') dx dy, F_y = \rho v_z \iint (-v') dx dy \quad (15)$$

ただし積分範囲は渦心と管壁間の環状部分である。

式(14)より  $u', v'$  を求め、式(15)に代入すると

$$F_x = 0, F_y = -\pi\rho v_z \varepsilon \Gamma \quad (16)$$

を得る。

したがって吸出し管端には  $|F_y|$  なる力が作用する。前に述べたように偏心した渦心は等速円運動をするから吸出し管端に作用する力の方向は周期的に変動しこれが吸出し管に規則的な振動を引き起こす

原因となる。

### 5・3 圧力変動

渦が偏心していると吸出し管の水平断面内における管壁に沿う流れの速度は位置により異なり、それにとともに圧力も変化する。管壁に沿う旋回速度の最大、最小値は図1に示すB、B'点にあるからB、B'点の圧力差は、それぞれの位置における速度および圧力を $v$ 、 $v'$ 、 $p$ 、 $p'$ とし、軸方向速度は同じとすればベルヌイの式より

$$\Delta p = p' - p = (\rho/2)(v^2 - v'^2) \quad (17)$$

式(17)に式(11)、(12)の関係を用いて計算すれば次式を得る。

$$\Delta p = p' - p = (\rho/2)(\Gamma^2/R^2) \cdot f_3, \quad (18)$$

$$f_3 = \frac{8e(1 - \alpha^2 + e^2)}{(1 + \alpha^2 - e^2)^2 - 4\alpha^2}$$

渦が管内を一回転すれば式(18)で与えられる大きさの壁面圧力変動が発生する。

### 6. 渦の安定 (振動の発生条件)

一般に吸出し管に流入する流れは管軸にたいして対称であると考えられる。したがって旋回流れにより渦心が形成されてもその渦心が管中心部に安定して存在していれば振動は発生しないはずである。したがって旋回流れが強くなると渦心が管中心部に安定して存在できなくなり偏心を生ずるものと考えられる。図2に示すように微小な攪乱のため最初は管軸と同心にあった渦心が微小量 $\Delta\epsilon$ だけ急に偏心したとする。この偏心が急激に生じたので流れの速度分布の状態は偏心前すなわち偏心がない状態と同じと考える。すると渦心外における圧力は次式で与えられる。

$$p = p_0 - \rho\Gamma^2/2r^2 \quad (19)$$

ここで $p$ は半径 $r$ における圧力であり、 $p_0$ は定数である。渦心の境界( $r = a$ )での圧力は式(19)より

$$p_1 = p_0 - \rho\Gamma^2/2a^2 \quad (20)$$

渦が $\Delta\epsilon$ だけ偏心した時の渦の境界の方程式は図2より次式で近似的に与えられる。

$$r = a + \Delta\epsilon \cos\psi \quad (21)$$

式(21)を式(19)に代入すれば偏心した渦心境界上の圧力はほぼ次式で与えられる。

$$p_2 = p_0 - \rho\Gamma^2/2a^2 + \rho\Delta\epsilon\Gamma^2 \cos\psi/a^3 \quad (22)$$

式(22)から式(20)を引けば

$$P_2 - P_1 = \Delta P = \rho\Delta\epsilon\Gamma^2 \cos\psi/a^3$$

これを渦心の全境界にわたって積分すればX方向の

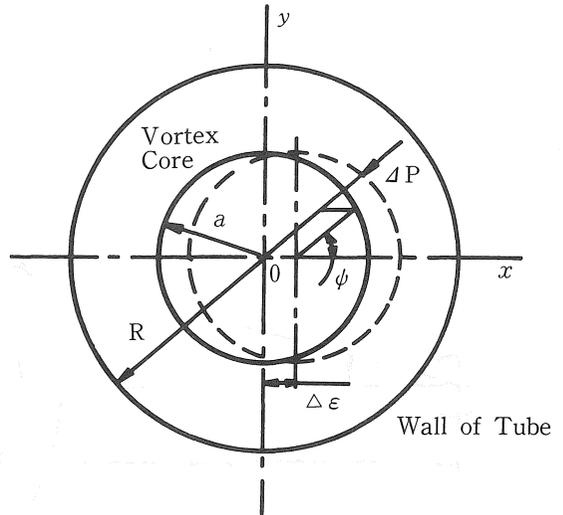


図2 偏心した渦心に作用する力

合力は

$$F_x = \int_0^{2\pi} \Delta P a \cos\psi \cdot d\psi = \pi\rho\Delta\epsilon\Gamma^2/a^2 \quad (23)$$

この $F_x$ は渦の偏心を減少させる方向の力である。一方渦心が $\Delta\epsilon$ だけ管軸から偏心して管軸の回りを旋回しているものとすれば、式(13)で $\epsilon$ を $\Delta\epsilon$ でおきかえた大きさの力が渦の偏心を増す方向に作用する。したがって以上二つの値を等値すれば渦の安定を定める次式が得られる。

$$\pi\rho\Gamma^2 = \frac{2\Delta\epsilon}{\sqrt{(R^2 + a^2 - \Delta\epsilon^2)^2 - 4a^2R^2}}$$

$$= \pi\rho\Gamma^2 \frac{\Delta\epsilon}{a^2} \quad (24)$$

ここで $\Delta\epsilon$ が小さいので $R^2 + a^2 - \Delta\epsilon^2 \approx R^2 + a^2$ とすれば上式から渦心の安定条件が得られる。

$$\frac{2}{\sqrt{(R^2 + a^2)^2 - 4a^2R^2}} = \frac{1}{a^2}$$

したがって

$$a/R = \alpha = 1/\sqrt{3} \approx 0.577 \quad (25)$$

を得る。

よって、 $\alpha < 0.577$ の範囲においては復原力が勝り渦心は管中心部に安定して存在できるが、旋回流れが強くなり渦心の半径が $\alpha \geq 0.577$ 以上になると復原力より渦心を偏心させる力が勝り渦心は偏心すると考えられる。

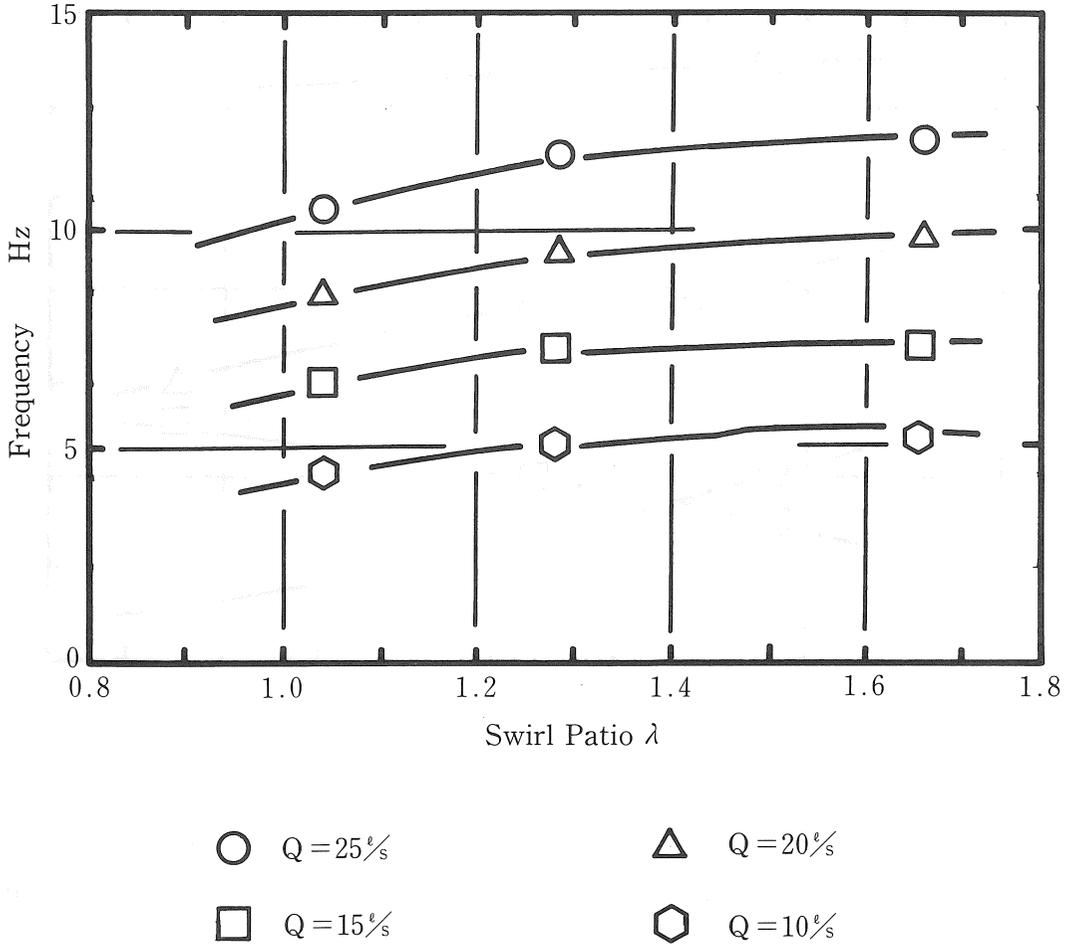


図3 円筒吸出し管壁面圧力の振動周波数

7. 偏心量の推定

すでに述べたように渦心の半径、渦度および偏心量がわかれば振動の発生の有無、振動の周波数、管におよぼす力、管壁面圧力の変動振幅等が計算により求まる。渦心の大きさは運動エネルギー最小の条件の下に生源寺ら<sup>5)</sup>により次のように求められている。

$$\tan^2 \lambda = \frac{2\alpha^2}{(1-\alpha^2)(1-\alpha^2+2\alpha^2 \ln \alpha)} \quad (26)$$

ここで  $\lambda$  は旋回率を表わし吸出し管の断面の管壁に沿う流れの周速度と平均軸速度の比である。

またこの旋回率は水車羽根車出口の幾何学的形状により次のように与えられる<sup>6)</sup>。

$$\lambda = \frac{(1-q)}{q}, \frac{1+(r_2/R_2)^2}{2}, \frac{\cot \beta_2}{m} \quad (27)$$

ここで  $q$  は水車の正規流量にたいする流量、 $(r_2/R_2)$  は羽根車出口における羽根の内外径比、 $\beta_2$  は羽根車出口外周における羽根角、 $m$  ( $\approx 1$ ) は羽根車出口外周における半径方向速度と吸出し管入口断面の平均軸速度との比である。一方渦心の偏心量については今のところ理論的に求めたものは見あたらない。そこで模型の吸出し管を用いた実験<sup>6)</sup>により得られた壁面圧力の振動周波数を用い式(10)により偏心量を求めた。実験は模型の案内羽根および吸出し管として内径120mm、長さ1000mmの円筒管を用い種々の旋回強さ、流量の下で壁面の圧力脈動を測定したものである。図3にこの実験により得られた壁面圧力の振動数を示す。式(10)より求めた偏心量  $e$  を図4に示す。また渦心の半径  $\alpha$  (式(26))、渦の半径位置  $k$

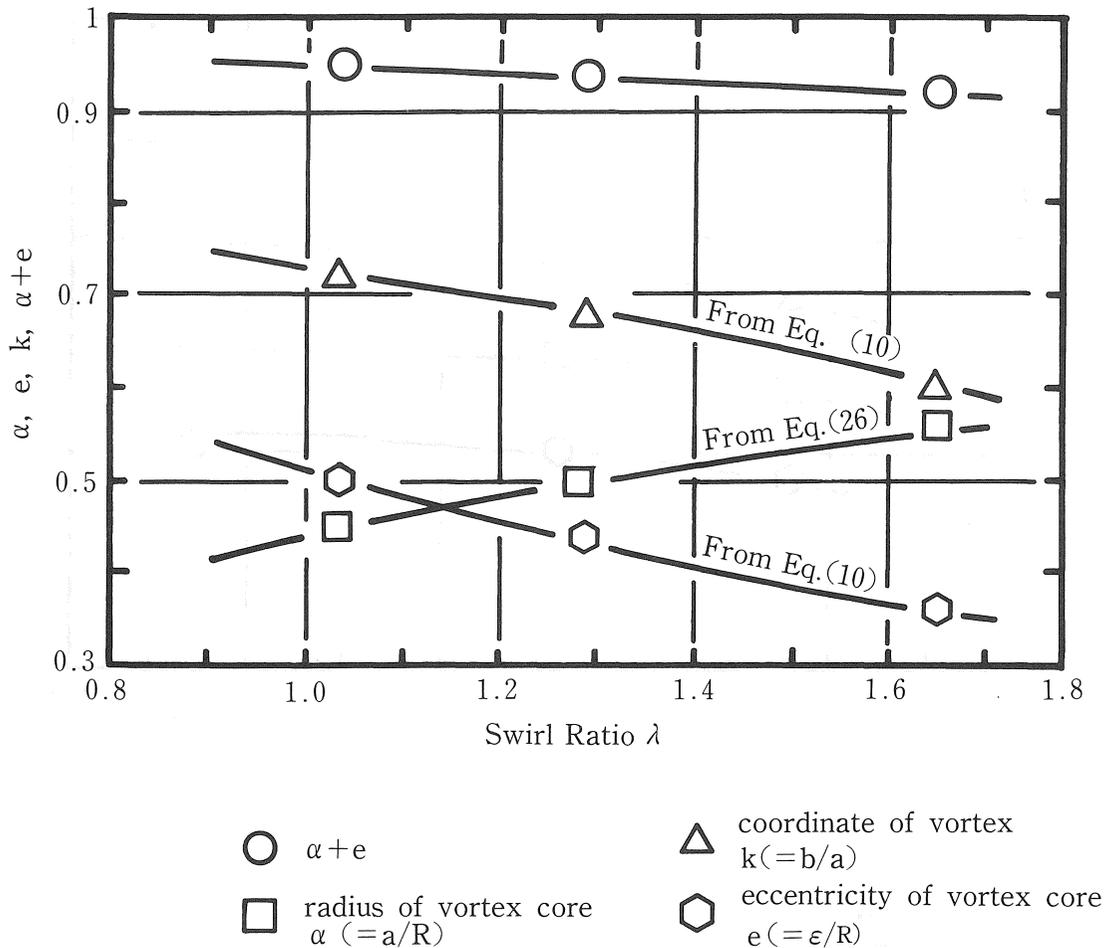


図4 渦心の半径と偏心率

(式(10))および渦心の外周の位置( $\alpha + k$ )も示してある。渦心の外周は常に管壁より境界層厚さと考えられる厚さだけ内側に存在している。すなわち渦心は管の境界層外縁に接して回転していることを示しており、前に述べたように渦心を偏心をさせる力が復原力より大きくなり偏心を始めると最早復原力は作用しなくなることからもこれは妥当な結果である。

#### 8. まとめ

水車の部分負荷時に発生する吸出し管振動の主要な原因である渦心の偏心ふれまわりについて理論的な解析を行い、次の結果を得た。

1) 渦心の半径と吸出し管半径の比  $\alpha$  が0.557以上

になると渦心は偏心し、吸出し管に周期的な振動が発生する。

2) 偏心した渦心は管壁の境界層外縁に接して回転する。

#### 9. 参考文献

- 1) W. J. Rheingans: Power Swing in the Hydroelectric Power Plant, Trans. ASME, vol. 62, pp. 171-177, 1940.
- 2) Lord Kelvin: Vibration of a Columnar Vortex, Philosophical Magazine, vol. 5, p. 155, 1880.
- 3) S. Uchimaru, S. Kito: On the Vibrations of the Draft Tube of a Water turbine, J. Eng.

- Tokyo Imperial Univ., vol. 18, 1930.
- 4) M. Murakami: Vibration of Water-Turbine Draft Tube, Trans. ASME, Ser. A, pp 36-42, 1961.
- 5) K. Shogenji, Y. Shimoyama: On the Flow of Water Through the Draft Tube of a Water Turbine, J. Eng. Kyushu Imperial Univ., vol. 7, p. 145, 1933.
- 6) M. Mizutani, M. Murakami: Vibration of Water-Turbine Draft Tube due to Swirl Component of Flow, Proc. 2nd China-Japan Joint Conference on Fluid Machinery, pp. 267-274, 1987.

(受理 平成元年 1月25日)