

# 半無限弾性地盤上の二つの基礎の地震応答

## その2. 数値計算とその結果

中村 満喜男

### Seismic Response of Two Foundations on an Elastic Half Space

#### Part 2. Numerical Computation and the Results

Makio NAKAMURA

In this paper, the dynamical interaction between two foundations on an elastic half space subjected to propagating seismic waves is investigated numerically following the previous paper, and the numerical results and the considerations are given.

It is given that the dynamical interaction between two foundations through the ground is remarkable, the state of the dynamical interaction which is changed with the dimensionless frequency is investigated for the distance between the two foundations and the velocity of the incident waves, and some significant results are obtained.

#### 1. まえがき

本題目の前論文(その1)<sup>17)</sup>では半無限弾性地盤上にある二つの基礎が地震動に対してどの様な相互作用を及ぼすかについて解析を行った。二つの基礎下の応力度分布を Chebyshev の多項式で展開し, その係数を未知量とするマトリックス方程式を得, 最終的に二つの基礎の変位(複素数)と基礎底面の反力分布(複素数)を得ることが出来た。

本論文では前論文で得られたこれらの解析結果を具体的に数値計算することによって生ずる, 種々の問題点と数値計算結果の考察について述べたものである。前論文の解析結果は最終的には必ず無次元量で表現されているので, それらの無次元量をパラメータにして数値計算を行っている。基礎の形状に関するパラメータ  $\zeta = a/b$  (二つの基礎の離れ具合), 入射波の伝播速度に関する無次元パラメータ  $\delta_1 = c_2/c_1$  (地盤のせん断波速度と入射波の地表面上で観測される見かけ上の伝播速度との比)の種々の組合せについて得られた結果が図で示されている。これらの結果の考察を行い次の事がわかった。第1に基礎A・Bの地盤を介して行われる相互作用はかなり顕著に現われており, 本論文の解析の有効性を示している。第2に二つの基礎間の距離と入射波の伝播速度に関するパラメトリックな検討を行い, 両者が同じ様な現象的影響を及ぼすことがわかり, 基礎間距離が増加すると

応答特性が無次元振動数に関する横軸 $\Omega$ に対し全体として左に寄って来る事, さらに応答振幅は横軸 $\Omega$ に対し変動の幅が増加すると共に小さなピークが増えることが明らかとなった。第3に基礎A・Bの振幅は無次元振動数 $\Omega$ の増加と共に減少するが, 基礎Aの振幅が局所的に最大になる振動数で基礎Bの振幅は局所的に最小の振幅を示すことであり, 又前記の表現でAとBを逆にした場合も同様に確認された。第4に基礎A・Bの底面の反力分布は基礎間距離と入射波の伝播速度に対し, 無次元振動数 $\Omega$ の小さい所ではあまり影響を受けないが,  $\Omega = 5 \sim 7$ ではかなり影響があることがわかった。

#### 2. 数値計算に関する若干の問題点

計算の大部分は前出論文の式(34)の係数マトリックスを作製する為に費されるが, マトリックスの各成分は式(40・1)より  $a_{mi}$  を式(41)より  $b_{mi}$  が計算される。式中の第2項に  $\int_0^\delta \{ \dots \} \cdot J_m(\Omega\xi) \cdot H^{(2)}(\Omega\xi) d\xi$  なる積分が出て来るが, 積分領域  $0 \sim \delta$  の  $\xi = 0$  の近傍で若干の注意が必要であるので, それについて述べる。

$\delta$  に比較して十分に小さい  $\varepsilon$  をとり, 1に対して  $(\xi/\delta)^2$ ,  $\xi^2$  を無視し,  $(1/4\delta)$  に対し  $\xi^2$  を無視すると

$$i \cdot \int_0^\varepsilon \frac{2 \cdot (\delta^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 - 2\xi^2)^2 + 4\xi^2 \cdot (\delta^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot J_m(\Omega\xi) \cdot$$

$$\begin{aligned} & \cdot \{J_l(\Omega\xi) - i \cdot Y_l(\Omega\xi)\} d\xi = 2\delta \left\{ i \cdot \int_0^\epsilon J_m(\Omega\xi) \cdot \right. \\ & \left. \cdot J_l(\Omega\xi) d\xi + \int_0^\epsilon J_m(\Omega\xi) \cdot Y_l(\Omega\xi) d\xi \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

ここに  $Y_l$  は  $l$  次の Neumann 関数である。式(1)の右辺の第1項の被積分関数  $J_m(\Omega\xi) \cdot J_l(\Omega\xi)$  は Bessel 関数の性質から  $m, l = 0 \sim L$  に対し特異性のない関数であり、十分小さな  $\epsilon$  に対し式(1)の右辺第1項の積分値は積分領域  $\epsilon \sim \delta$  の積分値に対し無視され得る。式(1)の右辺第2項の積分は

$$\begin{aligned} \text{Integ.} &= \int_0^\epsilon J_m(\Omega\xi) \cdot Y_l(\Omega\xi) d\xi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{2} \cdot \{J_m(\Omega\epsilon) \cdot \\ & \cdot Y_l(\Omega\epsilon) + J_m(0) \cdot Y_l(0)\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{\epsilon \cdot J_m(\Omega\epsilon) \cdot Y_l(\Omega\epsilon)\} - \\ & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Omega \cdot \epsilon^2}{2} \cdot \left[ \frac{d}{dx} \{J_m(x) \cdot Y_l(x)\} \right]_{x=\Omega\epsilon-0} \end{aligned} \quad (2)$$

上式で  $m = 0, l = 0$  の場合を考えると、 $x = 0$  の近傍で

$$\begin{cases} J_0(x) = 1 \\ Y_0(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right) \cdot \log\left(\frac{x}{2}\right) \end{cases} \quad (2 \cdot 1)$$

であるから<sup>18)</sup>

$$\begin{aligned} \text{Integ.} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{4}{\Omega\pi} \right) \cdot \frac{\Omega\epsilon}{2} \cdot \log \frac{\Omega\epsilon}{2} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Omega\epsilon^2}{2} \cdot \\ & \left[ \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{x} \right]_{x=\Omega\epsilon-0} = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\pi} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2 \cdot 2)$$

一般に  $m \geq l$  で  $m \neq 0, l \neq 0$  のとき、 $x = 0$  の近傍で

$$\begin{aligned} J_m(x) &= \left(\frac{1}{m!}\right) \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^m \\ Y_l(x) &= - \left\{ \frac{(l-1)!}{\pi} \right\} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{-l} \end{aligned} \quad (2 \cdot 3)$$

であるから、<sup>18)</sup>式(2)に代入すると積分値は

$$\begin{aligned} \text{Integ.} &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Omega \cdot \epsilon^2}{2} \cdot \left[ \frac{d}{dx} \left\{ - \frac{(l-1)!}{\pi \cdot m!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{m-l} \right\} \right]_{x=\Omega\epsilon-0} \\ & \rightarrow 0 \quad (m \geq l) \end{aligned} \quad (2 \cdot 4)$$

従って式(1)は十分小さな  $\epsilon$  をとれば、その積分領域を  $\epsilon \sim \delta$  としてさしつかえないことがわかる。すなわち

$$\begin{aligned} & \int_0^\delta \{\dots\} \cdot J_m(\Omega\xi) \cdot H_l^{(2)}(\Omega\xi) d\xi \doteq \int_\epsilon^\delta \{\dots\} \cdot \\ & \cdot J_m(\Omega\xi) \cdot H_l^{(2)}(\Omega\xi) d\xi \end{aligned} \quad (1 \cdot 1)$$

次に前出論文の式(17・1)にあらわれる

$$\int_{-(\xi+2)}^{-\xi} \sigma_n(x) dx \quad \text{と} \quad \int_\xi^{(\xi+2)} \sigma_n(x) dx \quad \text{の計算は} \sigma_n(x) \quad \text{に}$$

対し、式(25)を代入して積分とサンメーションの順序を変えると次の様に非常に簡単な式となる。

$$\int_{-(\xi+2)}^{-\xi} \sigma_n(x) dx = \sum_{l=0}^L {}_A C_l^n \cdot \int_{-1}^1 (1-\theta^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot T_l(\theta) d\theta$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{l=0}^L {}_A C_l^n \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} T_l(\sin\varphi) d\varphi \\ &= {}_A C_0^n \cdot \pi \end{aligned} \quad (3 \cdot 1)$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} T_l(\sin\varphi) d\varphi &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\{l \cdot \cos^{-1}(\sin\varphi)\} d\varphi \\ &= \begin{cases} 0 & l \neq 0 \\ \pi & l = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

同様にして

$$\int_\xi^{\xi+2} \sigma_n(x) dx = {}_B C_0^n \cdot \pi \quad (3 \cdot 2)$$

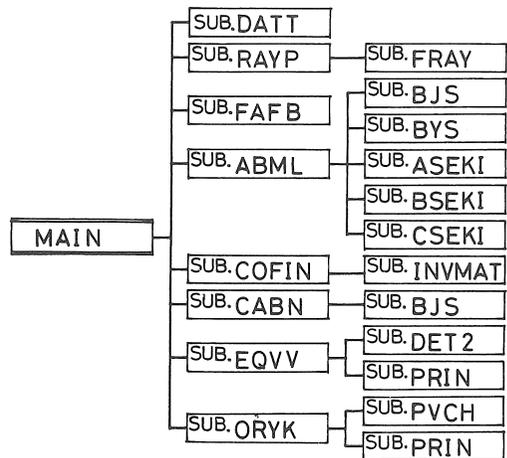


Fig. 1. Block Chart.

以上の2つの点に関して注意をし、数値計算のプログラムを作製した。ブロックチャートが図1に示されている。各ブロック(実はサブルーティン)の概略の説明をすると、SUB. DATT で計算処理に必要なデータの読み込みを行い、SUB. RAYP で Rayleigh の極の値を計算する。SUB. ABML で係数マトリックス [Ccoeff] の成分を計算しており、SUB. FAFB はその準備計算を行っている。SUB. COFIN は前記の複素係数マトリックスの逆マトリックスを求めるルーティンを含み、SUB. CABN で式(34)のベクトル {E} を求め未知係数  ${}_A C_l^n \cdot {}_B C_l^n$  を計算している。SUB. EQVV は式(17)から複素振幅  $A_1 \cdot A_2$  を計算し基礎 A・B の変位応答を求めている。SUB. ORYK は式(25)から基礎 A・B の底面の反力分布を計算するルーティンである。

数値計算に当り次の3つのパラメータについて検討を行った。第1の検討は積分領域の下限値すなわち式(1・1)の  $\epsilon$  の値であり  $\epsilon = 0.1 \times 10^{-4}, 0.4 \times 10^{-4}$  について検討したが、 $\epsilon = 0.1 \times 10^{-4}$  が適当であることがわかった。第2に式(40)・(41)に現われる数値積分のきざみ幅  $d\xi$  の検

討を行った。数値積分は台形則を使い、 $\Delta\xi = 0.02, 0.01, 0.005$  について計算を行い、 $\Delta\xi = 0.005$  が適当であることがわかった。第3に基礎A・Bの底面における反力分布を Chebyshev の多項式で展開したが、その項数をどこまでとるかを検討した。すなわち式(25)の  $\sum_{l=0}^L \dots$  の

LがL=3, 10, 15の3つの場合について計算を行った。項数Lが増加すると式(33)の係数マトリックス [Ccoef] の成分の数が飛躍的に多くなり、必要となる数値計算時間が非常に長くなる。さらに [Ccoef] 自身も又Lが増加すると逆マトリックスを求める際に安定性の悪いマトリックスとなる。L=10が適切であることが確認された。

計算結果は二つの基礎の位置を示す  $\xi = a/b$  ・基礎自身の形状を示す  $\nu = b/2h$  ・基礎の無次元質量M ・地盤のポアソン比  $\sigma$  ・入射波の伝播速度に関する無次元量  $\delta_1 = c_2/c_1$  の5つの量によって変化する為、これら5つのパラメータの適切な組合せについて計算を行った。

### 3. 数値計算結果とその考察

基礎A・Bの形状  $b/h = 25$ 、無次元質量  $M = 1.0$ 、地盤のポアソン比  $\sigma = 0.4$ 、入射波の伝播速度の無次元量  $\delta_1 = c_2/c_1 = 0.5$  をそれぞれ固定し、基礎A・B間の距離の無次元量  $\xi = a/b = 1.0, 0.5, 2.0$  の3つの場合について計算を行った。 $\xi$  の値が大きくなる程基礎A・Bは離れた位置にある。

次に入射波の伝播速度の影響を調べる為、 $\xi = 1.0$ 、その他の量を前記の値に固定し、 $c_2/c_1 = 0.2, 0.5, 1.0$  の3つの場合について計算を行った。入射波の振幅は0.1 (すなわち  $Y_1/b$ ) の無次元量で与えるものとする。それぞれの場合に関する基礎A・Bの複素鉛直変位振幅が図2-a~2-eに示されている。

図中の Real Part, Imaginary Part は複素鉛直変位の実部と虚部であり、横軸の無次元振動数  $\Omega$  に対して、 $\Delta\Omega = 0.2$  おきにプロットされている。基礎Aに関するものは白ぬきの円、基礎Bに関するものは黒円でプロットし折線で結んでいる。

$\Omega \rightarrow 0$  の静的な入力状態において、基礎A・Bの変位の虚部は共にゼロに取れんし、その実部は0.1に取れんしており、静的な入力ということを考えれば当然の結果となっていることがわかる。基礎Aと基礎Bの振幅の実部は横軸  $\Omega$  についてかなり違った値を示しており、入射波が伝播してくるという事に関する影響が明らかに認められる。振幅の虚部は  $\Omega = 0$  の近傍で基礎Aと基礎Bで符号が逆となって変る傾向が明瞭であるが、これは入射波の振幅の虚部が  $x$  に対し  $\sin(k_1 x)$  で与えられており、 $x = 0$  に対し逆対称になっている為である。基礎A・B

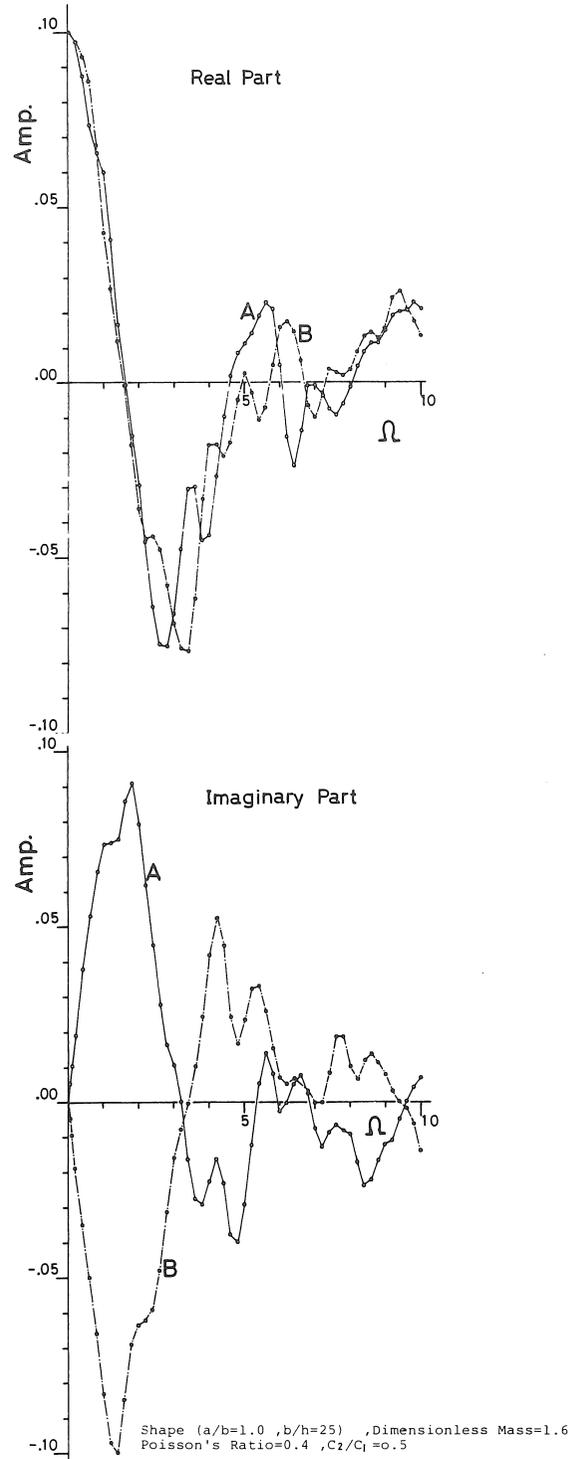


Fig. 2-a. Complex Responses of the Foundation A and B.

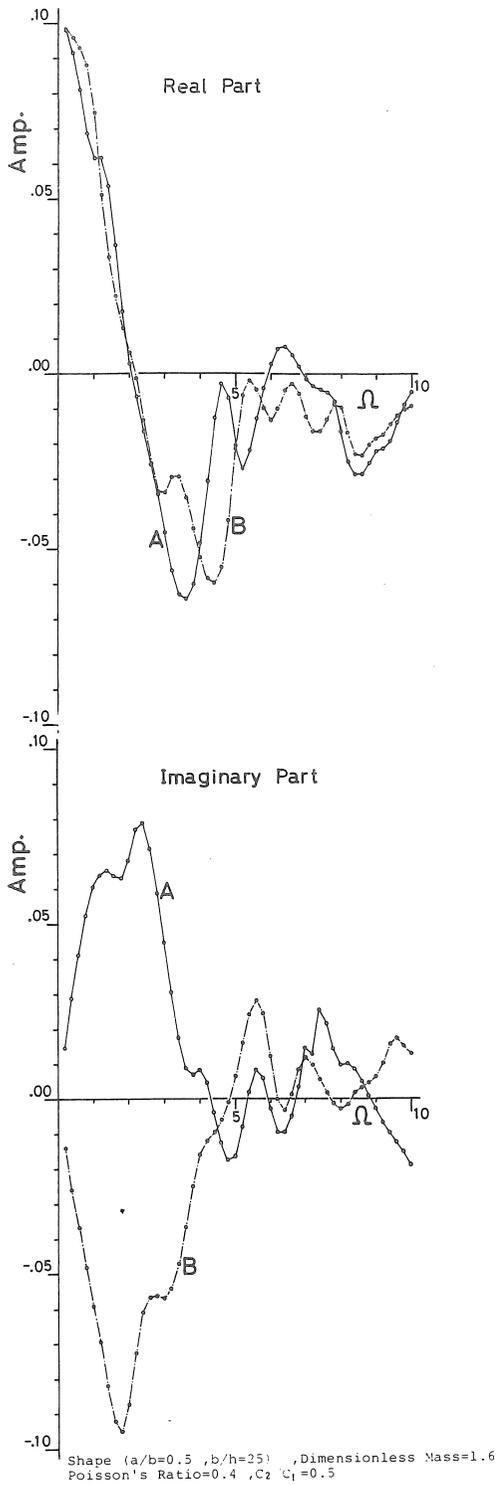


Fig. 2-b. Complex Responses of the Foundation A and B.

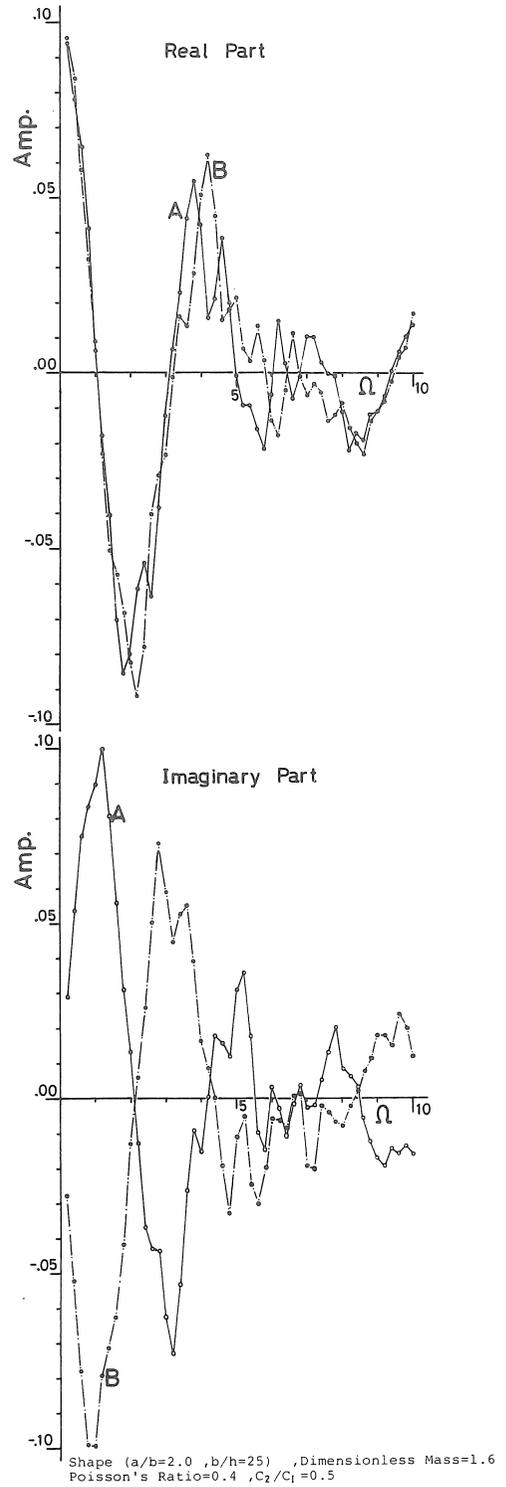


Fig. 2-c. Complex Responses of the Foundation A and B.

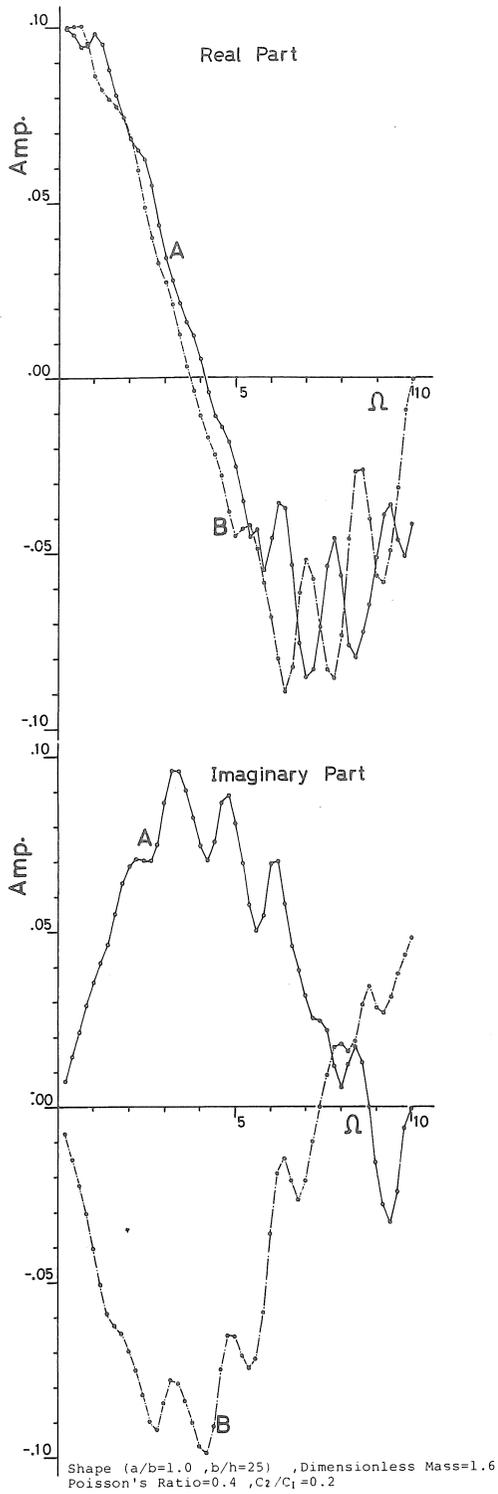


Fig. 2-d. Complex Responses of the Foundation A and B.

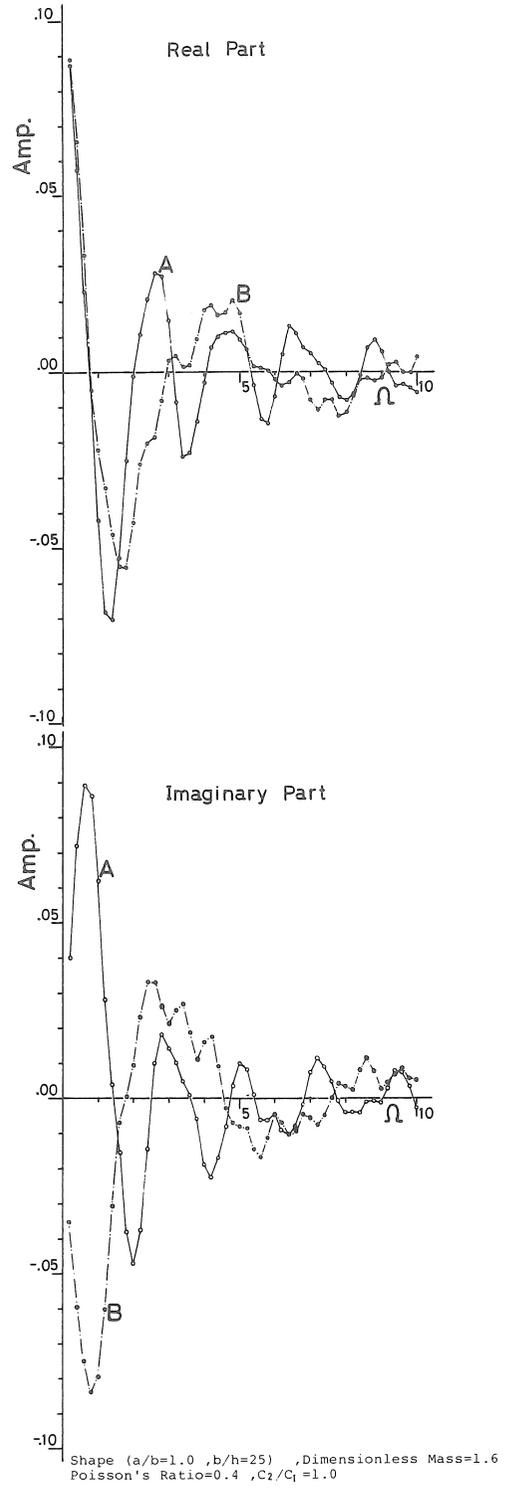


Fig. 2-e. Complex Responses of the Foundation A and B.

間の距離 $\xi$ が増加すると、応答の折線の形状は横軸 $\Omega$ に対し全体として左に寄って来る傾向があり、応答の折線に関する変動幅は漸増する傾向があり、応答の折線は激しく変動する傾向がある。同様な傾向が入射波の伝播速度に関する  $c_2/c_1$  の値が大きくなる（地盤のせん断波速度  $c_2$  に比較して入射波の速度  $c_1$  が遅くなる）に従って現われている。この事は基礎A・Bが遠く離れるという事と入射波の伝播速度が遅くなるという事が現象論的には同じ要因であるという結果を導き、容易に理解し納得の出来るところである。

図3は $\xi=1.0$ ,  $c_2/c_1=0.5$ の時の基礎A・Bの複素鉛直変位を複素平面上にプロットしたものである。基礎A・Bが半無限弾性地盤上にある為の影響として現われる基礎A—地盤—基礎Bの相互作用がなければ図3の折線A・Bは実軸に対して対称とならなければならない。従って見方を変えれば、非対称な分だけ相互作用がある

と見なしてさしつかえない。又図3において座標の原点と折線上の点を結ぶ半径ベクトルの大きさが複素変位の絶対値を表わし、実軸から半径ベクトルまでの偏角が位相を表わすことは明らかである。

次に各場合における複素変位の絶対値（単に振幅と言う）を無次元振動数 $\Omega$ についてプロットしたものが図4a~4eに示されている。基礎Aと基礎Bの振幅の横軸 $\Omega$ に対する変動を良く見ると、基礎Aの振幅が局所的に最大となる無次元振動数 $\Omega$ で基礎Bの振幅は局所的に最小となることがわかる。これらの逆の関係も又図から見られる。これらの現象は入射波として供給されるエネルギーが一定の時、基礎Aが局所的に最大のエネルギーを吸収して最大の振幅で振動すれば、基礎Bは局所的に最小のエネルギーを吸収して最小の振幅で振動せざるを得ないという事で明快に説明され得る。又基礎A・Bの振幅は共に無次元振動数 $\Omega$ の増加と共に全体として双曲線的に減

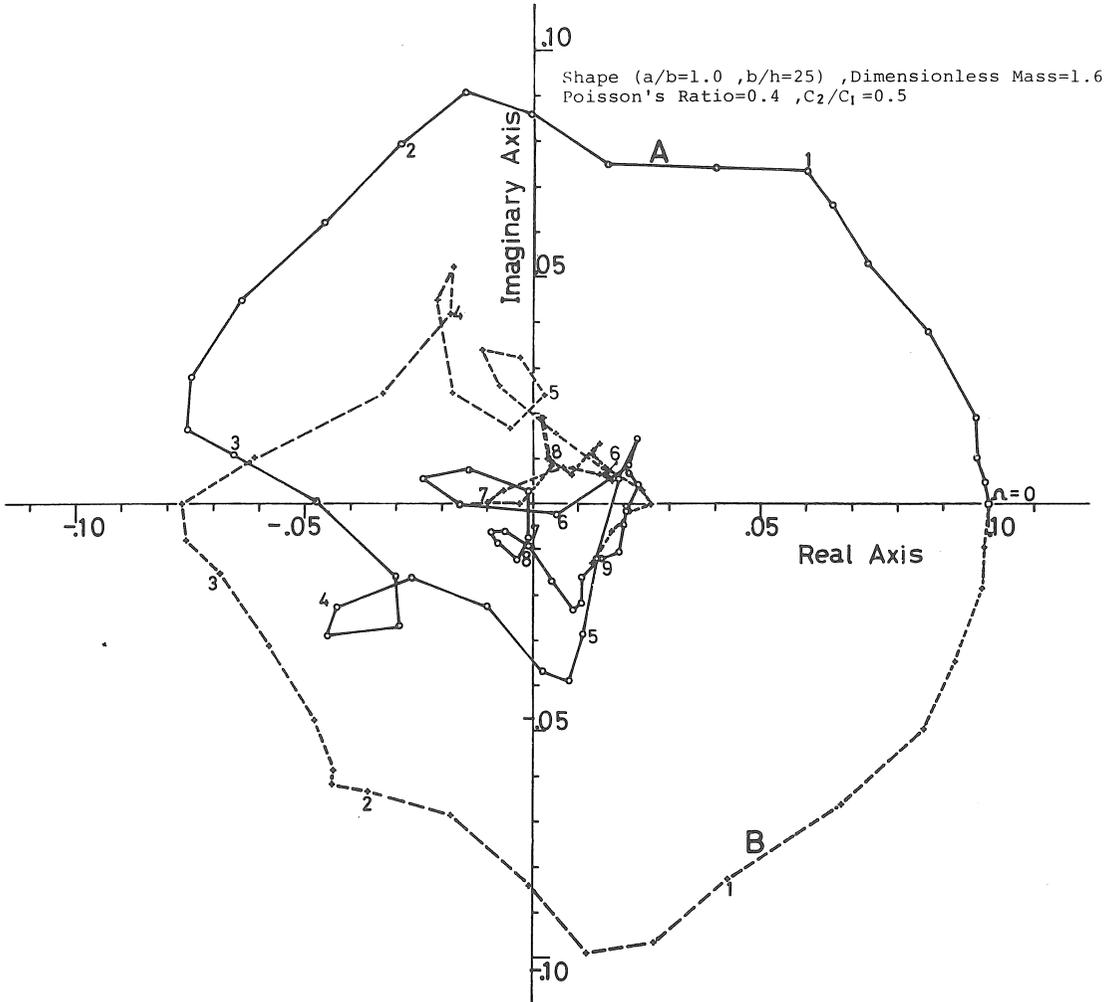
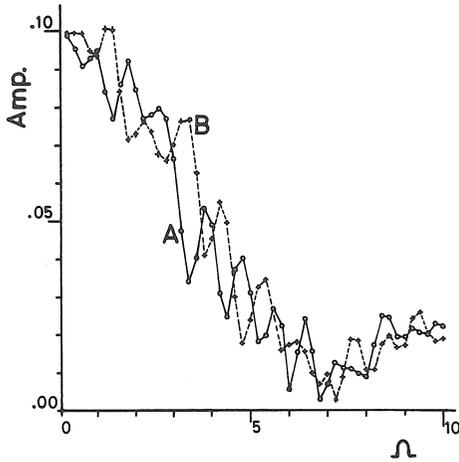
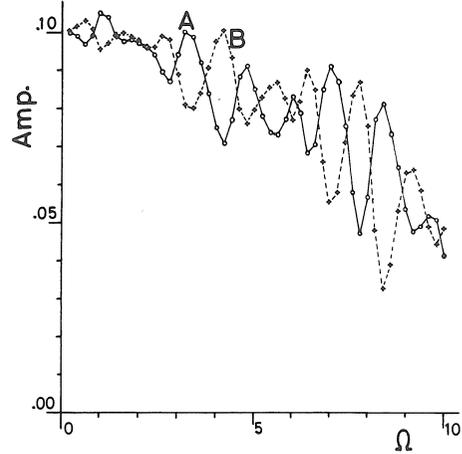


Fig. 3. Complex Amplitudes of the Foundation A and B which are plotted on the Complex Plane



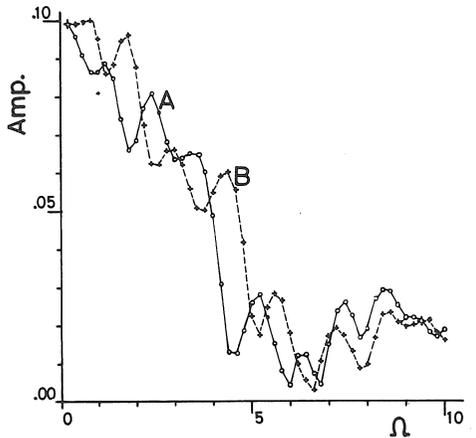
Shape (a/b=1.0 ,b/h=25) ,Dimensionless Mass=1.6  
Poisson's Ratio=0.4 ,C<sub>2</sub>/C<sub>1</sub>=0.5

Fig. 4-a. Absolute Amplitudes of the Foundation A and B.



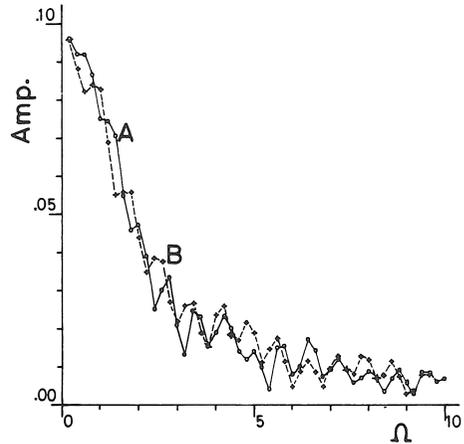
Shape (a/b=1.0 ,b/h=25) ,Dimensionless Mass=1.6  
Poisson's Ratio=0.4 ,C<sub>2</sub>/C<sub>1</sub>=0.2

Fig. 4-d. Absolute Amplitudes of the Foundation A and B.



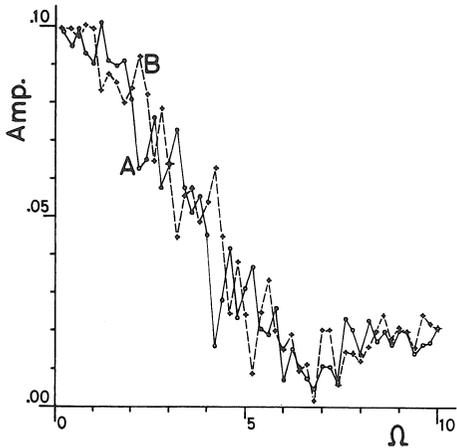
Shape (a/b=0.5 ,b/h=25) ,Dimensionless Mass=1.6  
Poisson's Ratio=0.4 ,C<sub>2</sub>/C<sub>1</sub>=0.5

Fig. 4-b. Absolute Amplitudes of the Foundation A and B.



Shape (a/b=1.0 ,b/h=25) ,Dimensionless Mass=1.6  
Poisson's Ratio=0.4 ,C<sub>2</sub>/C<sub>1</sub>=1.0

Fig. 4-e. Absolute Amplitudes of the Foundation A and B.



Shape (a/b=2.0 ,b/h=25) ,Dimensionless Mass=1.6  
Poisson's Ratio=0.4 ,C<sub>2</sub>/C<sub>1</sub>=0.5

Fig. 4-c. Absolute Amplitudes of the Foundation A and B.

少する傾向があるが、基礎間の距離と入射波の伝播速度 ( $c_2/c_1$ ) に関する振幅との関係は、図2-a~2-eの Real Part で述べられた関係とはほぼ同様な傾向が見られる。

表1-a~1-eは各場合における基礎A・Bの底面における反力の応力度分布を示したものである。無次元振動数  $\Omega$  の代表値  $\Omega=1, 3, 5, 7$  の4つの値について応力度分布が示されている。図中の一点鎖線は応力度の実部を表わし、破線は虚部を表わしており、太い実線は複素応力度の絶対値 (単に応力度の振幅と言う) を表わしている。応力度の振幅は無次元振動数  $\Omega$  が増加すると、急激に増えることがわかる。基礎間距離と伝播速度  $c_2/c_1$  のパラメトリックな変化は振動数  $\Omega$  が小さい所では反力分布に影響を及ぼさないが、 $\Omega=5, 7$  ではかなり違った反力分布が現われており、影響が現われていることがわかった。

Table 1-a. Stress Distributions under the Foundation A and B.

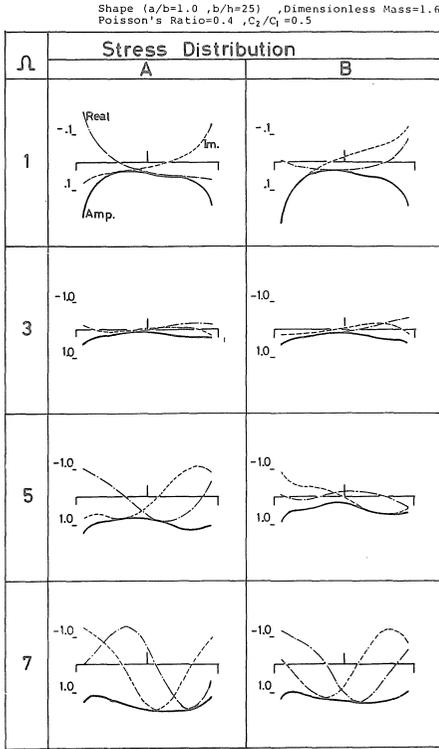


Table 1-c. Stress Distributions under the Foundation A and B.

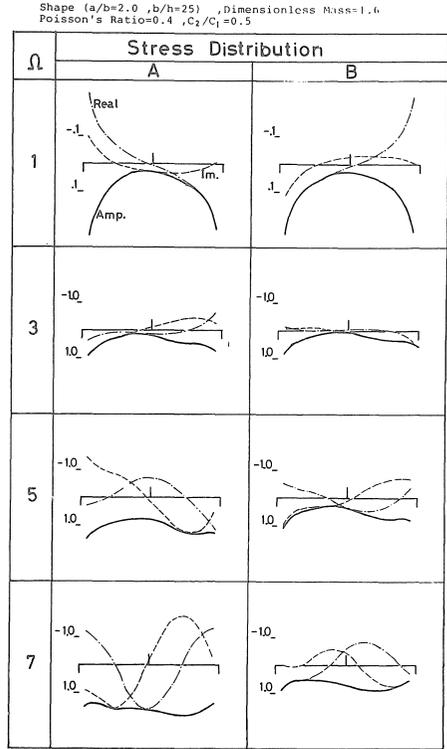


Table 1-b. Stress Distributions under the Foundation A and B.

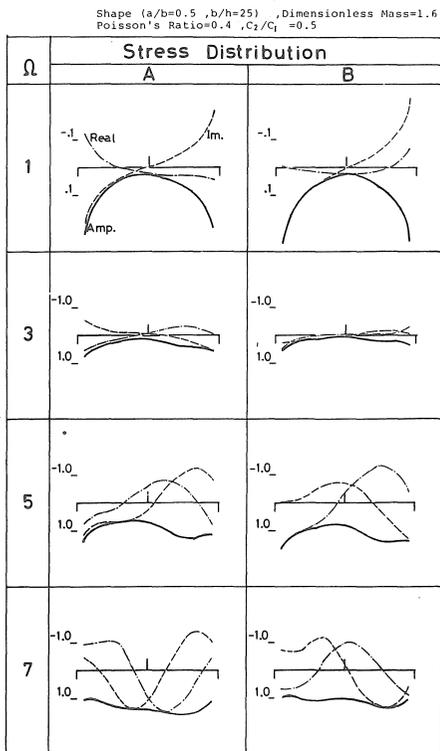


Table 1-d. Stress Distributions under the Foundation A and B.

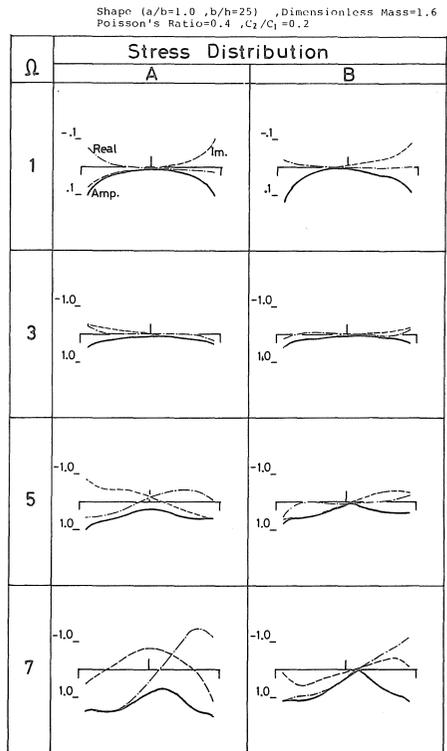
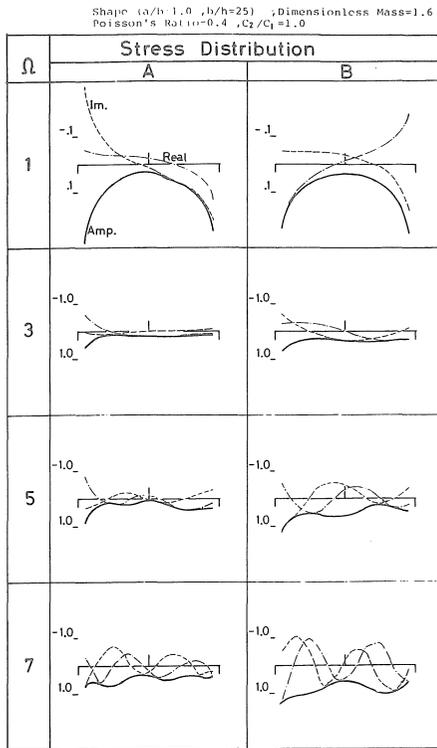


Table 1-e. Stress Distributions under the Foundation A and B.



4. むすび

半無限弾性地盤上にある二つの基礎が地震動に対してどのような相互作用を及ぼすかについて数値計算を行い、結果の表示と若干の考察を行った。数値計算結果は5つのパラメータに依存している。それらのパラメータの内、二つの基礎間の距離と入射波の伝播速度を種々変えてパラメトリックな検討を行った。その結果次のことが明らかとなった。第1に基礎A—地盤—基礎Bの相互作用はかなり顕著に現われ、本論文の解析の有用性が確かめら

れた。第2に基礎A・B間の距離が増大する事と入射波の伝播速度が遅くなる事は相互作用に同じ様な影響を及ぼし、応答特性を示す折線の形状は横軸 $\Omega$ に関して全体に左に寄って来る傾向があり、折線の変動幅が漸増すると共に細かい変動が現われて来る事がわかった。第3に二つの基礎の内の一方が局所的に最大の振幅を有する振動数 $\Omega$ で、他の一方の基礎は局所的に最小の振幅で振動することが明らかとなった。

本論文で扱われた方法は入射波として水平動或いは鉛直動+水平動を考える際にも同じ様に適用することが出来る。又3次元問題としての扱いも、3次元のグリーン関数が適切な形で得られれば同様の方法で解析可能であるため、本論文の方法を拡張使用することは容易である。

数値計算に要する電子計算機の使用時間であるが、IBM370/138を夜間専有で使って、1 case 当り実行時間がおよそ正味2時間必要であった。上記の様な本論文の拡張を考える時、この計算時間が非常に長くなってしまふ為、プログラム上何らかの工夫が必要であると考えられる。

5. 謝 辞

研究の推進に当り日頃から暖かい御理解と豊かな助言を下さる名古屋大学松岡理教授と本学小高昭夫教授に感謝の意を表わす次第である。数値計算はすべて本学電子計算機センターIBM 370/138を利用して行われた。電子計算機センター教職員の方々に対し合せて感謝する次第である。

6. 参考文献

- 17) 中村満喜男：半無限弾性地盤上の二つの基礎の地震応答—その1. 問題の定式化—, 前掲の論文。
- 18) 野邑雄吉：一工学専攻者のための—応用数学, 内田鶴園新社。

(受理 昭和55年 1月16日)