不確定下での配分計画の一解法

金 指　正 和

An Algorithm for Distribution problem under Uncertainty

Masakazu KANEZASHI

The distribution problem whose constsained resource vector is random variable can be solved by using an algorithm, developed by Dantzig and Madansky, called "tow-stage programs under uncertainty conditions" . It's certainty equivalence problem, however, would be formulated into nonlinear programming problem and it is difficult to treat for it's nonlinearity.

In this paper, we propose an algorithm to solve the distribution problem under uncertainty by considering the characteristic of the objective function of the problem. This algorithm consists of iterations of solving a simple simplex method and is more advantage than general procedure solving non-linear programming in view of both the computing time and the computer storage required.

1. 緒　　言

将来確保できる資源が"stochastic"にしか把握できない場合の配分計画は，資源制約ベクトルを確率変数として扱う線形計画法によって定式化される。しかし，資源制約ベクトルの各要素が独立である最も単純なケースにおいても，その確定性等価問題は非凸形非線形の問題となり，その解法は一般的には容易ではない。本文は，変換された等価問題の目的関数が，資源ベクトルの確率分布関数を含んでおり，確率分布関数が単調増加関数であることを利用して，線形計画法をくり返し解く事によって最適解を求めることを考える。

この方法によると，従来の非線形な確定性等価問題を解くことにくらべて，計算時間及び計算機の必要とする記憶量の点で効率的である。また，この方法は，Dantzig, Madanskyにより開発された確率的計画法のための"不確定下での２段階計画法[1]"に対しても有利である。

2. 問題の定式化

次のような生産計画問題を考える。

$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$　$i=1,2,\cdots,m$,　$j=1,2,\cdots,n$

$\boldsymbol{b}=(b_i)^{\mathrm{T}}$　$i=1,2,\cdots,m$　"T"は転置記号

$\boldsymbol{c}=(c_j)$　$j=1,2,\cdots,n$

$\boldsymbol{x}=(x_j)$

a_{ij}＝第j番目の製品１単位を生産するために必要な資源iの量

b_i＝第i番目の資源の利用可能量

c_j＝第j番目の製品１単位を生産するのに要する費用

x_j＝製品jの生産計画量

この問題を定式化してベクトル表示すれば

$$(\mathrm{P}_0)\quad \begin{cases} \text{minimize} & \boldsymbol{cx} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}\geqq 0 \end{cases}$$

となる。この問題を(P_0)とする。

ここでは，資源ベクトル$\boldsymbol{b}$が確率的にしか把握できない場合を取りあげて，よりフレキシブルな計画とするために，次のように考える。

資源不足，即ち，$\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}>b_i$に対しては，資源１単位当り$p_i$なるペナルティを課し，過剰分，即ち，$\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}<b_i$に対しては，資源１単位当り$q_i$なるペナルティを課すものとする。$p_i$，$q_i$はそれぞれ資源のshortage cost, salvage costに相当するものである。

意志決定者は，このとき原問題(P_0)の目的関数を修正して，これらペナルティ・コストの期待値を付加したものを新しい目的関数として，次のような確率的配分計画問題を解くことになる。この問題を(P_1)問題とする。

$$
(\mathrm{P}_1)\begin{cases}\text{minimize} & \boldsymbol{cx}+\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v})\\ \text{subject to} & \boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=\boldsymbol{b}\\ & \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}\geqq 0\\ & \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=0\end{cases}
$$

ここに$\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$はp_i, q_iを要素とするベクトルで, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$は新らたに導入した決定変数である。目的関数の第２項$\boldsymbol{E}(\cdot)$は期待値演算子である。問題(P_1)は stochastic Programs with recourse としてよく知られている[(2)]。

Vajda[(2)]の方法によると，もし資源ベクトルの要素b_iが確率変数で，区間$[\underline{b_i}, \overline{b_i}]$に分布し，かつ各$b_i$が独立でその周辺分布関数が$\mathrm{F}_i(t)$で与えられるときは，$(\mathrm{P}_1)$問題は次のような非線形問題に変換される[(3)]。

この問題を(P_2)とする。

$$
(\mathrm{P}_2)\begin{cases}\text{minimize}\ \ \mathrm{Z}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\leqq \boldsymbol{cx}-\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\\ \qquad +\sum_{i=1}^{m}(p_i+q_i)\int_{b_i}^{y_i}\mathrm{F}_i(t)\,dt\\ \text{subject to}\ \ \boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{o},\ \ \boldsymbol{x}\geqq 0\end{cases}
$$

(P_2)は，目的関数の中に含まれる変数$\boldsymbol{y}$に関する二階偏微分が$f_i(y_i)$となり，これはb_iの確率密度関数であり，常に非負であるから目的関数は convex 関数となり一般の非線形計画法によって一意的に解を求めることができる。

しかし，目的関数の特徴が何ら考慮されていない。目的関数のもつ大きな特徴は，$\mathrm{F}_i(t)$が分布関数であるということである。即ち，$\mathrm{F}_i(t)$に単調増加性があり，$0\leqq\mathrm{F}_i(t)\leqq 1$，及び各$y_i$に対して分離型であることがあげられる。この特徴をうまく利用すれば，非線形問題(P_2)を直接解くことなく，線形計画の感度分析の方法(双対シンプレックス法)により解を求めることができる。

3．線形計画による解法

(P_2)の最適解を$(\boldsymbol{x}^*,\ \boldsymbol{y}^*)$とすれば，$(\boldsymbol{x}^*,\ \boldsymbol{y}^*)$の満足すべき必要十分条件は，

$$\boldsymbol{cx}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}^*\geqq 0 \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_j^*>0 & \text{if}\quad c_j-\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\pi_i^*=0\\ x_j^*=0 & \text{if}\quad c_j-\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\pi_i^*>0\end{array}\right\} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{Ax}^*-\boldsymbol{y}^*=0,\ \ \boldsymbol{x}^*\geqq 0 \tag{3}$$

$$\mathrm{F}_i(y_i^*)=(p_i-\pi_i^*)/(p_i+q_i) \tag{4}$$

を満足するようなベクトル$\boldsymbol{\pi}^*$が存在することである。これらの条件のうち(1)〜(3)式は$\boldsymbol{y}$をある値$\boldsymbol{y}^*$に固定して，線形計画

minimize　$\boldsymbol{cx}$　subject to　$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{y}^*$, $\boldsymbol{x}\geqq 0$

を解けば自動的に満足される。この線形計画を解いて得られる最適な双対変数$\boldsymbol{\pi}^*$が残りの条件(4)式を満足していれば，最適解$(\boldsymbol{x}^*,\ \boldsymbol{y}^*)$が得られたことになる。

もし(4)式が満たされない場合は，目的関数が増加するように$\boldsymbol{y}$を変化させる手順について以下に述べる。

（手順１）　$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^k$に固定し，線形計画

minimize　$\boldsymbol{cx}$　subject to　$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{y}^k$, $\boldsymbol{x}\geqq 0$

を解いて最適解$\boldsymbol{x}^k$, $\boldsymbol{u}^k$を求める。

$\boldsymbol{y}^k$のkはイテレーションの番号を表わす。初期値$\boldsymbol{y}^1$は$\boldsymbol{b}$の平均値におく。

（手順２）

(5)　$\pi_i(y_i^k)=p_i-(p_i+q_i)\mathrm{F}_i(y_i^k)\quad i=1,\ \cdots,\ m$

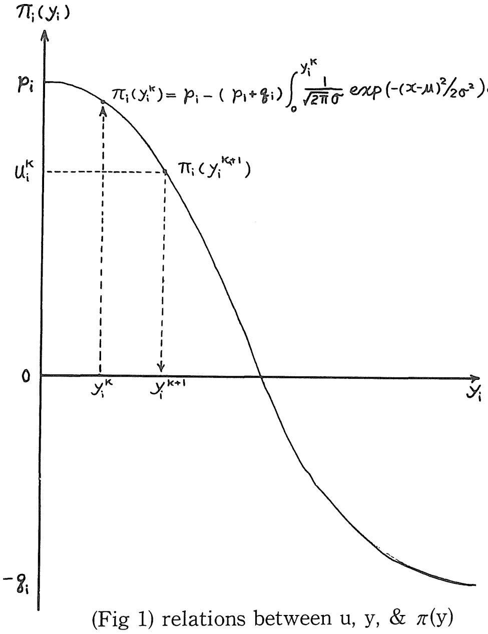
によって$\pi_i(y_i^k)$を計算する。もし

(6)　$\max_i|\pi_i(y_i^k)-u_i^k|<\varepsilon$

ならば，この時点での$\boldsymbol{x}^k$, $\boldsymbol{y}^k$が最適解である。εは微小数。

（手順３）

そうでないならば，$u_i^k<\pi_i(y_i^k)$のときは，(5)式によって$\pi_i(y_i^{k+1})=u_i^k$となるy_i^{k+1}を計算し，y_i^kをy_i^{k+1}に増加させる。逆に，$u_i^k>\pi_i(y_i)$のときは，(5)式により$\pi_i(y_i^{k+1})$がu_i^kとなるようなy_i^{k+1}に減少させる。$k=k+1$として（手順１）へもどる。



(Fig 1) relations between u, y, & π(y)

図−１は，$\mathrm{F}_i(t)$が正規分布の場合についてu_i^k, y_i^k, および$\pi_i(y_i)$の関係を説明したものである。

以上の手順を繰り返すことにより目的関数は単調に減少し最適値に収束する。

この手続きが実行できるためには，次の２点を証明しなければならない。

(A)　k回目のイテレーションにおける点を$(\boldsymbol{x}^k,\ \boldsymbol{y}^k)$とすれば，

$$Z(\boldsymbol{x}^k,\ \boldsymbol{y}^k) > Z(\boldsymbol{x}^{k+1},\ \boldsymbol{y}^{k+1})$$

である．

(B)　任意の$\underline{b}_i \leqq y_i^k \leqq \bar{b}_i$に対して

$$-q_i \leqq u_i^k \leqq p_i \qquad i=1,\ 2,\ \cdots m$$

が成立する。

これらは次のようにして示される。

(A)の証明：

$\boldsymbol{y}$を$\boldsymbol{y}^k$から$\boldsymbol{y}^{k+1}$に変化させたとき，変量$\varDelta i = y_i^{k+1} - y_i^k$が，線形計画の基底解に負になるものを生じさせぬとき，$(\boldsymbol{B}^{-1}(y+\varDelta) \geqq 0$，$\boldsymbol{B}$は第$k$ステップでの基底行列)，双対定理より

$$\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{y}^{k+1}\boldsymbol{u}^k,\quad \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{y}^k\boldsymbol{u}^k$$

が成立する。従って

$$Z(\boldsymbol{x}^{k+1},\ \boldsymbol{y}^{k+1}) - Z(\boldsymbol{x}^k,\ \boldsymbol{y}^k)$$
$$= \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}^{k+1} - \boldsymbol{y}^k) + \Sigma(p_i + q_i)\int_{y_i^k}^{y_i^{k+1}} F_i(t)dt$$

ここで　$\boldsymbol{u}^k\boldsymbol{y}^{k+1} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{k+1}$

$\boldsymbol{u}^k\boldsymbol{y}^k = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^k$

$\boldsymbol{y}_i^{k+1} - \boldsymbol{y}_i^k = \varDelta\, i$

を代入すれば，$F_i(t)$が単調増加であることから，

$$F_i(y_i^k)\varDelta i < \int_{y_i^k}^{y_i^k+\varDelta i} F_i(t)\,dt < F_i(y_i^{k+1})\varDelta i$$

を用いると，(6)式は

$$\Sigma\varDelta i(u_i^k - p_i + (p_i + q_i)F_i(y_i^{k+1}))$$
$$> Z(\boldsymbol{x}^{k+1},\ \boldsymbol{y}^{k+1}) - Z(\boldsymbol{x}^k,\ \boldsymbol{y}^k)$$
$$> \Sigma\varDelta i(u_i^k - p_i + (p_i + q_i)F_i(y_i^k)) \tag{8}$$

なる関係を与える。(5)式より

$$-p_i + (p_i + q_i)F_i(y_i^{k+1}) = -\pi_i(y_i^k)$$

であるから，(8)式の最初の不等式は

$$Z(\boldsymbol{x}^{k+1},\ \boldsymbol{y}^{k+1}) - Z(\boldsymbol{x}^k,\ \boldsymbol{y}^k)$$
$$< \Sigma\varDelta i(u_i^k - \pi_i(y_i^{k+1}))$$
$$= 0 \qquad (\because\ \ u_i^k = \pi_i(y_i^{k+1})) \tag{9}$$

次に，y_iを変化させたとき，基底変数に負のものが生じ，基底変換の必要がある場合について考える。y_i^k と y_i^{k+1}の間の$\tilde{y}_i$なる値に対してどれかの基底変数が0になったものとする。

このときの基底変数を$\tilde{\boldsymbol{x}}$とし，(双対変数は，まだ基底変換が行なわれていないので，$\boldsymbol{u}^k$で不変である。)，0になった基底を変換した後の基底変数を$\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}$，そのときの双対変数を$\tilde{\boldsymbol{u}}$とする。

y_iを$\tilde{y}_i$より更にy_i^{k+1}に変えても基底変換の必要がないとすれば$\tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}^{k+1}$である。

このとき(8)式より明らかに

$$Z(\tilde{\boldsymbol{x}},\ \tilde{\boldsymbol{y}}) < Z(\boldsymbol{x}^k,\ \boldsymbol{y}^k) \tag{10}$$

である。0の基底変数を基底から出しても，目的関数の値は変化しないので

$$Z(\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}},\ \tilde{\boldsymbol{y}}) = Z(\tilde{\boldsymbol{x}},\ \boldsymbol{y}) \tag{11}$$

また，$\tilde{y}_i \to y_i^{k+1}$に対しては基底変換はないので双対定理より

$$\tilde{\boldsymbol{y}}'\boldsymbol{u}^k = \boldsymbol{c}'\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{c}'\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \tilde{\boldsymbol{y}}'\tilde{\boldsymbol{u}} = \tilde{\boldsymbol{y}}'\boldsymbol{u}^{k+1} \tag{12}$$

が得られる。$\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}}$を$\boldsymbol{x}^k$，$\tilde{\boldsymbol{y}}$を$\boldsymbol{y}^k$，$\tilde{\boldsymbol{u}}$を$\boldsymbol{u}^k$と考えて基底変換の必要のない場合にあてはめれば，

$$Z(\boldsymbol{x}^{k+1},\ \boldsymbol{y}^{k+1}) - Z(\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}},\ \tilde{\boldsymbol{y}})$$
$$< \sum_{i=1}^{m} \tilde{\varDelta}_i(\tilde{u}_i - \pi_i(y_i^{k+1}))$$
$$= 0 \qquad \text{(Q.E.D)}$$

つぎに(B)について示そう。

最適解$y_i{}^*$に対しては，もし$y_i^k < y_i{}^*$のとき$u_i^k > \pi_i(y_i^k)$であるとすれば，

$$u_i^k = \partial(\boldsymbol{c}\boldsymbol{x})/\partial y_i^k \tag{13}$$
$$\pi_i(y_i^k) = -\partial Q_i(y_i)/\partial y_i^k \tag{14}$$
$$Q_i(y_i) = -p_i y_i + (p_i + q_i)\int_{b_i}^{y_i} F_i(t)\,dt \tag{15}$$

なる関係より，

$$u_i^k - \pi_i(y_i^k) = \partial Z(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})/\partial y_i^k > 0 \tag{16}$$

となり，y_i^kが増加して$y_i{}^*$に近づくと目的関数が増加してしまう。($\partial Z/\partial y > 0$より)

このことは$y_i{}^*$が最適解であることに矛盾する。よって

$$u_i^k < \pi_i(y_i^k) \qquad \text{if} \qquad y_i^k < y_i{}^* \tag{17}$$

同様に

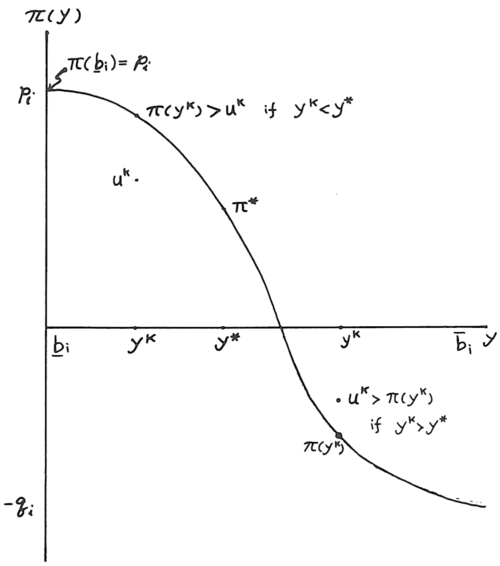
$$u_i^k > \pi_i(y_i^k) \qquad \text{if} \qquad y_i^k > y_i{}^* \tag{18}$$

また，$\underline{b}_i \leqq y_i^k \leqq \bar{b}_i$より

$$p_i = \pi_i(\underline{b}_i) \geqq u_i^k$$
$$-q_i = \pi_i(\bar{b}_i) \leqq u_i^k \tag{19}$$

(Q.E.D)

図—2は，$y^k < y^*$ならば必らず$u_i^k < \pi_i(y^k)$であり，



(Fig 2) illustration of $p_i \geqq u^k \geqq -q_i$

$b_i \leqq y_i^k$ だから $p_i \geqq u_i^k$ を説明したものである。

4. 非線形計画法による解法との比較

(P_2) を nonlinear programming の手法，例えば，Reduced Gradient 法[4] を用いて解く場合，次の step を必要とする。以下各 step の概略を述べて，本文の手順と比較する。

変数 $\boldsymbol{x}$ を分割して $\boldsymbol{x}_1 \in R^m$, $\boldsymbol{x}_2 \in R^{n-m}$ とし，$\boldsymbol{x}_1$ を基底変数，$\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{y}$ を独立変数とする。

(step 1) 実行可能な点 $\boldsymbol{x}_1^k$, $\boldsymbol{x}_2^k$, $\boldsymbol{y}^k$ に於いて独立変数 ($\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{y}$) に関する reduced gradient $\boldsymbol{g}^k$ を計算する。

$$\boldsymbol{g}^k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_2 - A_2^T A_1^{-1} \boldsymbol{c}_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\boldsymbol{p} + \mathrm{diag}\, \mathrm{F}_1(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}) + A_1^{-1}\boldsymbol{c}_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} {\scriptstyle n-m} \\ \\ {\scriptstyle m} \end{matrix}$$

ここに $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$, A_1, A_2 は $\boldsymbol{c}$, A を $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ に対応して分割したものである。

(step 2) $\boldsymbol{g}^k$ を独立変数の制約上へ射影したベクトル $\boldsymbol{h}^k$ を求める。

$$h_j^k = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x_{2j}^k = 0, \ g_j^k > 0 \\ g_j^k & \text{otherwise} \end{cases}$$

(step 3) $\boldsymbol{h}^k$ を探索方向とし，$\theta > 0$ に対して次の点を求める。

$$\boldsymbol{x}_{2j}^{k+1} = 0 \qquad \text{if} \quad \boldsymbol{x}_{2j}^k - \theta \boldsymbol{h}_j^k < 0$$
$$\boldsymbol{x}_{2j}^{k+1} = x_{2j}^k - \theta h_j^k \qquad \text{if otherwise}$$
$$\boldsymbol{y}_j^{k+1} = y_j^k - \theta g_j^k$$

(step 4)

$$A_1 \boldsymbol{x}_1 + A_2 \boldsymbol{x}_2^{k+1} - \boldsymbol{y}^{k+1} = 0, \quad \boldsymbol{x}_1 \geqq 0$$

を満足する $\boldsymbol{x}_1^{k+1}$ を求める。もし，不可能ならば，$\boldsymbol{x}_2^{k+1}$ の正のものと，$\boldsymbol{x}_1^{k+1}$ の要素で負となるものを基底変換する。

(step 5)

$$\mathrm{Z}(\boldsymbol{x}_1^{k+1}, \boldsymbol{x}_2^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}) < \mathrm{Z}(\boldsymbol{x}_1^k, \boldsymbol{x}_2^k, \boldsymbol{y}^k)$$

ならば，($\boldsymbol{x}^{k+1}$, $\boldsymbol{y}^{k+1}$ を出発点として (step 1) へもどる。そうでなければ，θ を $\theta/2$ にして $\boldsymbol{h}^k$ はそのままで (step 3) へもどる。

この方法と比較すると，$\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{y}^k$ に固定した線形計画を解いて得られる $\boldsymbol{x}_1^k$, $\boldsymbol{x}_2^k$, $\boldsymbol{u}_1^k = A_1^{-1}\boldsymbol{c}_1$
(手順1) は，(step 1) の

$$\boldsymbol{g}^k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_2 - A_2' \boldsymbol{u}^k \\ \boldsymbol{u}^k - \pi(\boldsymbol{y}^k) \end{pmatrix}$$

を求めているのと同値である。$\boldsymbol{x}_2^k = \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{c}_2 - A_2' \boldsymbol{u}^k > 0$ であるから，$\boldsymbol{y}$ のみ $\boldsymbol{y}^k$ から $\boldsymbol{y}^{k+1}$ に変化させる。

これは step 2 において

$$\boldsymbol{h}^k = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{y}^k) \end{pmatrix}$$

とすることに対応している。本文の (手順1) で，$\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{y}^k$ から $\boldsymbol{y}^{k+1}$ に変化させたときの対応する $\boldsymbol{x}^{k+1}$ を求めることは，step 4 に相当している。

従って非線形計算の回数 (即ち，(5)式の計算と，step 1 の $\boldsymbol{g}^k$ の計算) は同じであるが，本文の方法では，目的関数の値の変化をチェックする必要がない。

5. 数値例

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \to \min \\ \text{subject to} \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = b_1 \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 = b_2 \end{cases}$$

但し，$p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 2$
b_1 は区間 [0, 100] で一様分布
b_2 は区間 [0, 80] で一様分布

(手順1) 初期 $\boldsymbol{y}^0 = (50, 40)$ とおく。

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \to \min$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 500$$
$$-x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 40$$

を解いて最適解 $\boldsymbol{x}^0$, $\boldsymbol{u}^0$ を得る。

$$\boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (0, 48, 46)$$
$$\boldsymbol{u}^0 = (1, 1)$$

(手順2) (5)式により $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{y}^0)$ を計算する。

$$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{y}^0) = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (p_1+q_1)\mathrm{F}_1(y_1^0) \\ (p_1+q_1)\mathrm{F}_2(y_1^0) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (2+2)\mathrm{F}_1(50) \\ (2+2)\mathrm{F}_2(40) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$u_1^0 > \pi_1(y_1^0)$
$u_2^0 > \pi_2(y_2^0)$ より (手順3) に。

(手順3)

$$1 = u_1^0 = p_1 - (p_1+q_1)\mathrm{F}_1(y_1^1) = 2 - 4\mathrm{F}_1(y_1^1)$$
$$1 = u_2^0 = p_2 - (p_2+q_2)\mathrm{F}_2(y_2^1) = 2 - 4\mathrm{F}_2(y_2^1)$$

より y_1^1, y_2^1 を求めると $y_1^1 = 25$, $y_2^1 = 20$.

(手順1) へもどり，y_1^0, y_2^0 をそれぞれ，25, 20 として最適解 $\boldsymbol{x}^1$, $\boldsymbol{u}^1$ を求めると，

$\boldsymbol{x}^1 = (0, 24, 23)$, $\boldsymbol{u}^1 = (1, 1)$ を得る。

(手順2)

$y_1^1 = 25$, $y_2^1 = 20$ に対して，$\pi_1(y_1^1) = 1$, $\pi_2(y_2^1) = 1$ となり，$\pi_i(y_i) = u_i$ を満足する。

従って，$x_1 = 0$, $x_2 = 24$, $x_3 = 23$ が最適解で，このときの目的関数の値は45となる。

6. 参考文献

(1) Madansky. A, Dantzig. B :
"Methods of solution of linear Programs under uncertainty", Operations Research 10, 1962.

(2) Vajda. S :
"Probabilistic Programming" Academic Press, 1972.

(3) 金指："確率的計画法の双対性について，"日本オペレーションズリサーチ学会，昭和51年秋季全国大会。

(4) Abadie, J ed :
"Application of the GRG algorithm to optimal control problems", Academic Press, 1970, in Chap8 of "Integer and Nonlinear Programming."

（受理　昭和55年1月16日）