

“ちえん線路をもつエサキダイオード 対形発振器の研究”

新 美 吉 彦

“Study of the Oscillator of two Lossless Transmission Lines, which are mutually connected with a one-port and are terminated by a pair of Tunnel Diodes.”

Yoshihiko NNIIMI

Summary-It has been well known in the references J. Nagumo and M. Shimura [1], and Morisue, Goto [2], that the oscillator of two lossless transmission lines, which are mutually connected with a one-port and terminated by a pair of Tunnel diodes, voltage-controlled and negative incremental conductance diode, produced micro wave pulse and oscillation of various wave forms. In this paper, It will be described that the two such oscillators, mutually connected with any linear one-port, have various interesting properties such that: i.e., 1) in the case of the two same oscillators, two almost-periodic oscillations having inverse phase each other, independent of the kinds and the values of connected one ports, occur, and 2) particularly in the case of resistive one port connected, the frequencies of oscillators are constant, independent of the value of resistor. And such the oscillator, therefore, may be useful for the extremely-stabilized, both sinusoidal and pulse. oscillator. we shall be ordered the described parts of article in the following. First, we construct a “normal form” of general networks consisting of non-linear lumped elements (resistive, capacitive, and inductive) and delayed-lines; and the algorithms of the method are given. Next, it will be constructed normal-form of general difference-differential equations. of the system

And thirdly, the above equations are transformed into a algebraic equations, with the approximated-method of equivalent-linearization and the describing function one. And then, amplitude and frequency in the case of almost-periodic oscillation are obtained, using the algebraic equations. These approximated values are fairly well equaled with the experimental data, but in the case of sine-wave form of oscillation, these two values are very different from each other.

Finally, from the comparison with those three results, that is the values of approximation method, experimental data, and the numerical wave form by the the digital computer, the characters and the properties of the oscillator will be clarified

§. 0. ま え が き

電圧制御型負性抵抗 2 端子素子であるエサキダイオードを、無損失分布定数線路：ちえん線路の一端に接続した発振器では、マイクロ波帯のパルスや、その他の種々の興味ある波形の発振が得られることは、すでに文献 1) 2) において明らかである。本論文は、そのような発振器を 2 個、任意の線形 2 端子素子 (i.e. one-port) で相互に接続した結合系について調べたものである。すなわち、先づ準備として無損失分布定数線路を一種の素子とみなして、素子としての色々な表現形式を記述した。

更にそのようなちえん 2-port 素子 (無損失線路をそのように呼ぶことにする) と集中形非直線素子を含んだ一般の回路網の Normal-Form 構成法のアルゴリズムについて述べた。次に最初に述べた回路において成立する一般的な微分-差分方程式系の Normal-Form を作り、更に特殊な場合：線路長のみ異なるときに成立する非常に形式の整った一組の方程式系を導いた。その際、結合に用いられる 2 端子の、インピーダンスが与えられていれば、式の上ではそのインピーダンスに対応した微分作用素環を用いることにより、任意の種類の 2 端子で接続し

た場合の方程式系を直ちに書くことが可能である。

次に、上記方程式系を、等価線形化一記述函数法を適用して、代数方程式系に変換すると、その式のかたちから、もとの回路の等価回路として、非線形抵抗を振巾 a の函数としてのコンダクタンス $G(a)$ で置き換え他の線形素子はふつうのインピーダンス解析の場合と全く同様なおきかえをすると線形回路として取扱うことが可能であることを示す。この等価回路を用いて計算した周波数並びに振巾は、発振波形が正弦波に近い場合にはかなりよく実験値と一致する。逆に、発振波形が非正弦波状（例へば、パルス状）になると上の計算値と実験値とが一致しなくなる。この事実は電子計算機を用いて数値解析により求めた結果からも言える。以上の結果を用いてパルスを発生するための回路パラメーターの選び方についても述べた。更に、この発振器は、2個のダイオードの交流電圧位相が、線路長比、結合度、結合素子の種類などに殆んど無関係に逆位相になるので、単一の発振器の **phase locking** としても使用可能である。

更に、抵抗結合の場合には、結合抵抗の値に無関係に発振周波数が一定なので、極めて安定した正弦波、並びにパルス発生器として使用できる。

最後に、キャパシタンス結合の場合には、発振が不安定で、かつ発振が生起しにくいのが、一度発振が起ると持続振動が生じ、ある条件のもとでは、極めて複雑なパルス状波形の発振が生ずるので、ランダムパルス発生器として役立つものと思われる。

以上によりこのタイプの発振器のなかでも最も簡単でかつ基本的な相互結合系について、その基本となる特長を明らかにしたのが本論文である。

§. 1. 準備：一般的なこと

1. 1. ちえん素子

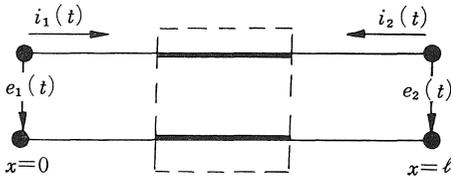


図 1. 無損失分布定数線路；ちえん素子の回路図

または、書き換えると；

$$(6b) \begin{cases} e(t) \triangleq \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(t) \\ H(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H(t-1) \\ G(t-1) \end{bmatrix} = h(t) + \hat{h}(t-1), \\ Z_0 \cdot i(t) \triangleq \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(t) \\ H(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H(t-1) \\ G(t-1) \end{bmatrix} = h(t) - \hat{h}(t-1) \end{cases}$$

ここに、ベクトル $h(t)$, $\hat{h}(t-1)$, は：

$$(7) \quad h(t) \triangleq \begin{bmatrix} G(t) \\ H(t) \end{bmatrix}, \quad \hat{h}(t-1) \triangleq \begin{bmatrix} H(t-1) \\ G(t-1) \end{bmatrix},$$

で定義される。以後の文章においては、ベクトルはふつ

無損失分布定数線路は、図. 1. のような 2 ポートである。そこで、この回路にはどのような表現形式が可能かまた、素子としては、どんな素子とみなし得るかを考える。結論としては、パラメーター表示、ハイブリット表示等の表現形式が可能であり、かつまた素子としては **resistive element** の一種とみなすことが出来ることが示される。先づ、回路パラメーター、変数及び **normalized** 変数：

$$(1) \begin{cases} L, C: l: a \triangleq 1/\sqrt{LC}, \quad Z_0 \triangleq \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \tau_0 \triangleq \ell/a; \\ x, t; v(x, t), i(x, t); \\ x/l \triangleq x, \quad t/\tau_0 \triangleq t; \\ v/\sqrt{Z_0} \triangleq v, \quad i/\sqrt{Z_0} \triangleq i, \end{cases}$$

とすると、無損失の場合の、電信方程式は：

$$(2) \begin{cases} (\partial/\partial x) \cdot v + (\partial/\partial t) \cdot i = 0, \\ (\partial/\partial x) \cdot i + (\partial/\partial t) \cdot v = 0, \end{cases}$$

となる。この方程式(2)のダランベール解は：

$$(3) \begin{cases} v(x, t) = g(x-t) + h(x+t), \\ i(x, t) = g(x-t) - h(x+t), \quad (g, h, \text{は任意函数}) \end{cases}$$

であり、境界条件：

$$(4) \quad \begin{cases} \text{at } x=0, & \begin{cases} v(0, t) = e_1(t)/\sqrt{Z_0}, \\ i(0, t) = i_1(t) \cdot \sqrt{Z_0}, \end{cases} \\ \text{at } x=\ell, & \begin{cases} v(1, t) = e_2(t)/\sqrt{Z_0}, \\ i(1, t) = i_2(t) \cdot \sqrt{Z_0}, \end{cases} \end{cases}$$

を(3)に代入する。更に、次の置き換え：

$$(5) \begin{cases} \sqrt{Z_0} \cdot g(-t) \triangleq G(t), \text{ 従って,} \\ \sqrt{Z_0} \cdot g(1-t) = G(t-1), \\ \sqrt{Z_0} \cdot h(t+1) \triangleq H(t) \quad \text{〃}, \\ \sqrt{Z_0} \cdot h(t) = H(t-1), \end{cases}$$

を行うと、 $e_i(t)$, $i_i(t)$, ($i=1, 2$) は次の“パラメータ表示”を得る：

$$(6a) \begin{cases} e_1(t) = G(t) + H(t-1), \\ Z_0 \cdot i_1(t) = G(t) - H(t-1), \\ e_2(t) = H(t) + G(t-1), \\ Z_0 \cdot i_2(t) = H(t) - G(t-1), \end{cases}$$

うの小文字で表わし、ベクトルの成分は細い小文字に添数を附して表わすことにする； $h(t) = [h_1(t), \dots, h_n(t)]^t$, 等々。また、(6b)をさらに $h(t)$ のみを用い

て表現すると：

$$(6b; 1) \begin{cases} e(t) = h(t) + Ah(t-1), \\ z_0 i(t) = h(t) - Ah(t-1), \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ここに, } A \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \end{array} \right.$$

となる。さらに、ハイブリッド表示：

$$(6c) \begin{cases} \begin{bmatrix} e_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = g_{11}h(t) + g_{12}h(t-\tau), \\ \begin{bmatrix} i_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = g_{21}h(t) + g_{22}h(t-\tau), \end{cases}$$

ここに、

$$(8) \begin{cases} g_{11} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z_0^{-1} \end{bmatrix}, & g_{12} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -z_0^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \\ g_{21} \triangleq \begin{bmatrix} z_0^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & g_{22} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -z_0^{-1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

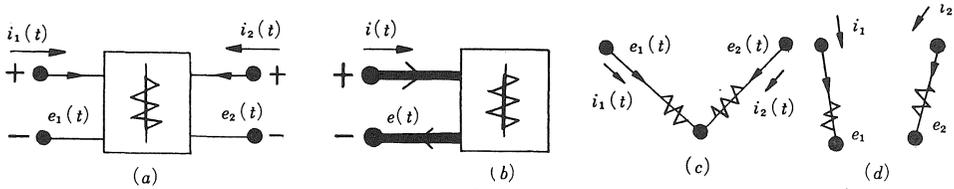


図 2. 分布定数線路 (i.e. ちえん線路) の色々なグラ表示法。

(a)は普通の2ポートとしての表示であり、(b)はベクトル電圧、電流による表示であり、(c)、(d)は線形グラフに有用な表示方法である。

次に、何個かのちえん素子が回路網に含まれている場合には、電圧電流の番号づけ (これは §1.2 で述べる) と任意函数 $h(t)$ の番号づけとは independent に行う、i.e.:

$$(10) \begin{cases} e_i(t) = h_j(t) + h_{j+1}(t-\tau_{j+1}) \\ z_{0i} \cdot i_i(t) = h_j(t) - h_{j+1}(t-\tau_{j+1}), \end{cases}$$

ここで、 j 、と i とは任意の相互に独立な正整数であ

$$(13) X_i \triangleq \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix} (i=1, 2), \quad X_{i\tau} \triangleq \begin{bmatrix} x_{1i}(t-\tau_{1i}) \\ \vdots \\ x_{ni}(t-\tau_{ni}) \end{bmatrix} \equiv X_{i\tau},$$

また f_i も同じ次元のベクトルである。 \dot{X}_1 は時間についての微分を意味する。もし、ちえん効果が全然ない回路であれば、ベクトル X_2 の項はなくなり、かつ、 $X_{1\tau_1}$ etc. の項も消滅して、(1)は簡単な方程式系：

$$(12a) \quad \dot{X}_1 = f_1(t, X_1)$$

となり、ふつうの常微分方程式系となる。これはすでに T.E. Sterm が解いている。(文献11 参照のこと)。さらに、以後においては、差分項を微分変数と区別するために、 X_2 の代りに h と書くことも多いので注意する。このような Normal Form の必要性 (または、重

また、

$$(6d) \begin{cases} e_1(t) - z_0 i_1(t) = E^{-\tau} \cdot (e_2(t) + z_0 i_2(t)), \\ e_2(t) - z_0 i_2(t) = E^{-\tau} \cdot (e_1(t) + z_0 i_1(t)), \end{cases}$$

とも表現される。ここに；

$$(9) \quad E^{-\tau} \cdot y(t) \triangleq y(t-\tau); \text{ ちえん作用素である。}$$

また

$$(6e) \begin{cases} G(t) = \frac{1}{2}(e_1(t) + z_0 i_1(t)), \\ H(t) = \frac{1}{2}(e_2(t) + z_0 i_2(t)), \end{cases}$$

これらの式から、ちえん素子の回路グラフとしては、次の4通りのいずれかで表示することにする。これらの表示は皆お互に等化である：

る。また $h_j(t)$ は、適当に：

$$(11) \quad h(t) = \begin{bmatrix} h_1(t) \\ \vdots \\ h_p(t) \end{bmatrix}, \quad h_\tau(t) = \begin{bmatrix} h_1(t-\tau_1) \\ \vdots \\ h_p(t-\tau_p) \end{bmatrix},$$

とベクトル表示することにする。

1.2. 差分微分方程式系の Normal Form.

1.2.1. 定義

ここで、Normal Form の“定義”を：

$$(12) \begin{cases} \dot{X}_1 = f_1(t, X_1, X_2, \dot{X}_{1\tau_1}, X_{1\tau_1}, X_{2\tau_2}), \\ X_2 = f_2(t, X_1, \dot{X}_{1\tau_1}, X_{1\tau_1}, X_{2\tau_2}), \end{cases}$$

によって与えておく。ここに、

要性)は、解をベクトル X の位相空間中の解曲線とみなして、数学的に調べる場合、更には、これを電子計算機を用いて数値的に研究しようとするとき、などに全く便利な形式であるからである。

1.2.2. Normal Form の構成手順

§1.1から、ちえん素子は“一般化された抵抗素子”と考えられること、及びパラメータ表示が最つとも適当なものであることなどがわかった。そこで、この結果を用いて、(12)のかたちの Normal Form を作る手順を述べる。

Normal Form を作るには, state variables X_i にどんなものをえらぶかということと, その state variable を用いて Norm Form を構成すること, の2段階を必要とする. そこで, 我々は, X_1 には, 容量の電荷の線形和 q 及びインダクタンスの磁束の線形和 λ をえらび, X_2 にはちえん素子のパラメーター表示にでてくる任意函数 $h(t)$ を用いる.

先づ tree T_N を次のようにして作る:

(1) 与えられた回路網 G からすべてのインダクティブな枝路と抵抗枝路を去除いた, キャパシティブな部分グラフを考え, この部分グラフの任意の forest F_c をえらぶ.

(2) 次に, 回路網 G からすべての抵抗枝路とキャパシティブな枝路を短絡してインダクティブな部分グラフを作り, この部分グラフの任意の tree T_L をえらぶ.

(3) F_c と T_L の枝路から成る部分グラフに, 抵抗枝路を適当に附加して回路網 G の tree T_N を構成する.

この手順において, もし(1), (2)の F_c, T_L の作り方に任意性があるならば, なるべく最後の T_N はちえん素子枝路を全く含まないか, または全部含むようにえらぶと都合がよい. この T_N を基として, 回路網の枝路は次の6個の部分集合に直和分割される:

Chords (links)	tree
S_c —キャパシティブ chords,	S_s —キャパシティブな tree 枝路,
S_g —抵抗性の chords,	S_r —抵抗性の tree 枝路,
S_γ —インダクティブな chords,	S_l —インダクティブな tree 枝路,

これから以後, それぞれの部分集合に属する branch ベクトルの電圧, 電流, 電荷等は, 夫々 $e_c, i_c, q_c,$ と表わすことにする. 又グラフにおける表示では 1(c) 等と表示する. tree T_N は, 基本ループ行列 B , カットセット行列 Q を次のように定義する:

$$(14) \quad \begin{matrix} C & g & \gamma & S & r & l \\ \left. \begin{matrix} B = \begin{bmatrix} I_{cc} & 0 & 0 & F_{cs} & 0 & 0 \\ 0 & I_{gg} & 0 & F_{gs} & F_{gr} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\gamma\gamma} & F_{\gamma s} & F_{\gamma r} & F_{\gamma l} \end{bmatrix} \\ Q = \begin{bmatrix} -F_{cs}^t & -F_{gs}^t & -F_{\gamma s}^t & I_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & -F_{gr}^t & -F_{\gamma r}^t & 0 & I_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & -F_{\gamma l}^t & 0 & 0 & I_{ll} \end{bmatrix} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} c \\ g \\ \gamma \\ S \\ r \\ l \end{matrix} \end{matrix}$$

ここで, $I_{cc}, F_{cs}, \text{etc.}$, は部分行列であり, F_{cs}^t は F_{cs} の転置行列である. そうすると, キルヒホッフの法則は:

$$(15) \quad (K.V.L) \quad B e_N = 0, \quad (K.C.L) \quad Q i_N = 0,$$

ここに $e_N = [e_c \ e_g \ e_\gamma \ e_s \ e_r \ e_l]^t$, i_N も同様である. そこで, state variables としては, node—pair

charges q , と loop flux linkage λ , (またはその dual), ならびに $h(t)$ をえらぶ:

$$(16) \quad \begin{cases} q = q_s - F_{cs}^t q_c, \\ \lambda = \lambda_\gamma + F_{\gamma l} \lambda_l, \\ h(t) = H(q, \lambda, h_\tau), \end{cases}$$

または, キルヒホッフ則から:

$$(16a) \quad \begin{cases} \dot{q} = F_{gs}^t i_g + F_{\gamma s}^t i_\gamma, \\ \dot{\lambda} = -F_{\gamma r} e_r - F_{\gamma s} e_s, \\ h(t) = H(q, \lambda, h_\tau), \end{cases}$$

さらに, 各素子とキルヒホッフの法則から夫々次の関係が成り立っている:

$$(a) \quad \text{Inductor: } f_L(t, i_L, \lambda_L) = 0, \quad i_L \triangleq [i_\gamma, i_{l_i}]^t,$$

$$\begin{aligned} \lambda_L &\triangleq [\lambda_\gamma, \lambda_{l_i}]^t; \\ \lambda - \lambda_\gamma - F_{\gamma l} \lambda_{l_i} &= 0, \\ i_{l_i} - F_{\gamma l}^t i_\gamma &= 0, \end{aligned}$$

$$(b) \quad \text{Capactor: } f_c(t, e_c, q_c) = 0, \quad e_c \triangleq [e_c, e_s]^t,$$

$$\begin{aligned} q_c &\triangleq [q_c, q_s]^t; \\ q - q_s + F_{cs}^t q_c &= 0, \\ e_c + F_{cs} e_s &= 0, \end{aligned}$$

$$(c) \quad \text{Resistor: } f_R(t, e_R, i_R) = 0, \quad e_R \triangleq [e_g, e_r]^t,$$

$$\begin{aligned} i_R &\triangleq [i_g, i_r]^t; \\ i_r - F_{gr}^t i_g - F_{\gamma r}^t i_\gamma &= 0 \\ e_g + F_{ar} e_r + F_{gs} e_s &= 0, \end{aligned}$$

もし, 上の q, λ 及び $h(t)$ が state variable として “完全” であるならば, (16a) の q, λ , 及び $h(t)$ の右辺は $q, \lambda, h(t), h_\tau$, の函数として表現可能でなければならない. この可能性の証明は一般には困難であるが, 普通の場合には, (L), (C) を適当に附加することによって, 大抵の場合可能となる.

次に, (a), (b) から夫々:

$$(17) \quad \begin{cases} i_\gamma = I_\gamma(t, \lambda), \\ e_s = E_s(t, q), \end{cases} \quad (I_\gamma, E_s \text{ は函数を表わす})$$

なる式が得られたとする. さらに, (C) から

$$(18) \quad \begin{cases} i_g = I_g(t, e_s, i_\gamma), \\ e_r = E_r(t, e_s, i_\gamma), \end{cases}$$

が求められたとすれば, (16a) 式から, Normal Form:

$$(16b) \quad \begin{cases} \dot{q} = Q(t, q, \lambda, h, h_\tau), \\ \dot{\lambda} = \lambda(t, q, \lambda, h, h_\tau), \\ h(t) = H(t, q, \lambda, h_\tau), \end{cases}$$

なる方程式系が得られるはずである. しかし, ちえん素子を含む場合には(18)式を求めることは一般に不可能であり, どうしても h, h_τ が入った式になる. この場合の式変形の組織的なアルゴリズムは, 少し後に述べることにして, ここで, 前に述べたようにちえん素子を “一般化された抵抗素子” と考えて, 上述の手続きで

Normal Form の求まる具体例を1つ上げておこう。

1.2.3. 具体例

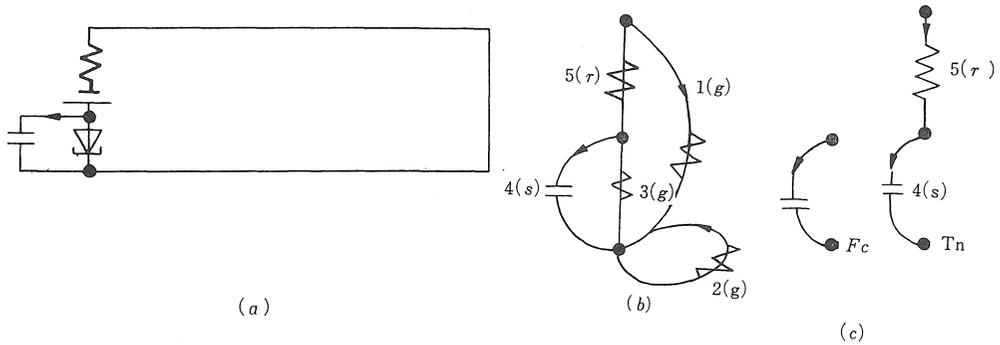


図 3. ちえん線路をもつエサキダイオード発振器

図3.の回路図の(b)から： S_c —なし， S_g — $1(g)$ ， $2(g)$ ， $3(g)$ ， S_r —なし， S_s — $4(S)$ ， S_r — $5(r)$ ， S_l —なし，となる。結局， $1(g)$ ， $2(g)$ がちえん素子で， $3(g)$ が非直線抵抗素子である。従って，枝路変数は：

$$(19) \begin{cases} q_c = \text{なし}, e_c = \text{なし}, q_s = [q_4], e_s = [e_4], \\ i_g = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}, e_g = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, i_r = [i_5], e_r = [e_5], \\ i_r = \text{なし}, \lambda_r = \text{なし}, i_e = \text{なし}, \lambda_e = \text{なし}, \end{cases}$$

また， B ， Q は：

$$(20) \quad B = \begin{array}{c|ccc|cc|c} & c & & g & & \gamma & S & & r & & l \\ & 1 & 2 & 3 & & & 4 & & 5 & & \\ \hline & 1 & 0 & 0 & & & -1 & & -1 & & \\ & 0 & 1 & 0 & & & 0 & & 0 & & \\ & 0 & 0 & 1 & & & -1 & & 0 & & \\ \hline & & & & & & & & & & \end{array}$$

$$I_{gg} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_{gs} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad F_{gr} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

他は零；

また，枝路の関係は：

$$(21) \quad \begin{cases} f_L(t, i_L, \lambda_L) = 0, \text{ なし}, f_c(e_c, q_c) \\ \quad = [e_4] - \frac{1}{C}[q_4] = 0 \\ f_R(t, i_R, e_R) = \begin{pmatrix} f_1(i_1, e_1) \\ f_2(i_2, e_2) \\ i_3 - f(e_3) \\ e_5 - R_5 i_5 + E_5 \end{pmatrix} = 0, \end{cases}$$

$$(21a) \quad \begin{cases} e_1 = h_1(t) + h_2(t - \tau_2), \\ e_2 = h_2(t) + h_1(t - \tau_1), \\ Z_0 \cdot i_1 = h_1(t) - h_2(t - \tau_2), \\ Z_0 i_2 = h_2(t) - h_1(t - \tau_1), \\ \quad (\tau_1 = \tau_2) \end{cases}$$

である。これから，(a) inductor は“なし”，

(b) capacitor は：

$$e_4 - \frac{1}{C} q_4 = 0, \quad q - q_4 = 0,$$

従って

$$(22) \quad e_s = [e_4] = \left[\frac{1}{C} q \right],$$

次に，(c) Resistor：

$$\begin{aligned} e_1 &= h_1(t) + h_2(t - \tau_2), & i_3 - f(e_3) &= 0, \\ Z_0 \cdot i_1 &= h_1(t) - h_2 \tau_2, & e_5 - R_5 i_5 + E_5 &= 0, \\ e_2 &= h_2 + h_1 \tau, & i_5 + i_1 &= 0, \\ Z_0 i_2 &= h_2 - h_1 \tau, & e_1 - e_5 - e_4 &= 0, \\ & & e_2 &= 0, \\ & & e_3 - e_4 &= 0, \end{aligned}$$

これから：

$$(23) \quad i_g = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{Z_0} \begin{pmatrix} h_1 - h_2 \tau \\ h_2 - h_1 \tau \\ 2 \cdot f\left(\frac{1}{C} q\right) \end{pmatrix},$$

$$e_r = [e_5] = \left[-\frac{R_5}{Z_0} (h_1 - h_2 \tau) - E_5 \right]$$

まか，(14a) から，

$$(24) \quad \dot{q} = -i_1 - i_3 = -\frac{1}{Z_0} (h_1 - h_2 \tau + Z_0 f\left(\frac{q}{C}\right)),$$

さらに，

$$\begin{cases} h_1 + h_2 \tau + \frac{R_5}{Z_0} (h_1 - h_2 \tau) + E_5 - \frac{1}{C} q = 0, \\ h_2 + h_1 \tau = 0, \end{cases}$$

から，

$$(24a) \quad h(t) \triangleq \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\frac{1}{1 + R_5/Z_0} \left\{ -(1 - R_5/Z_0) h_2 \tau - E_5 + \frac{1}{C} q \right\} \right]$$

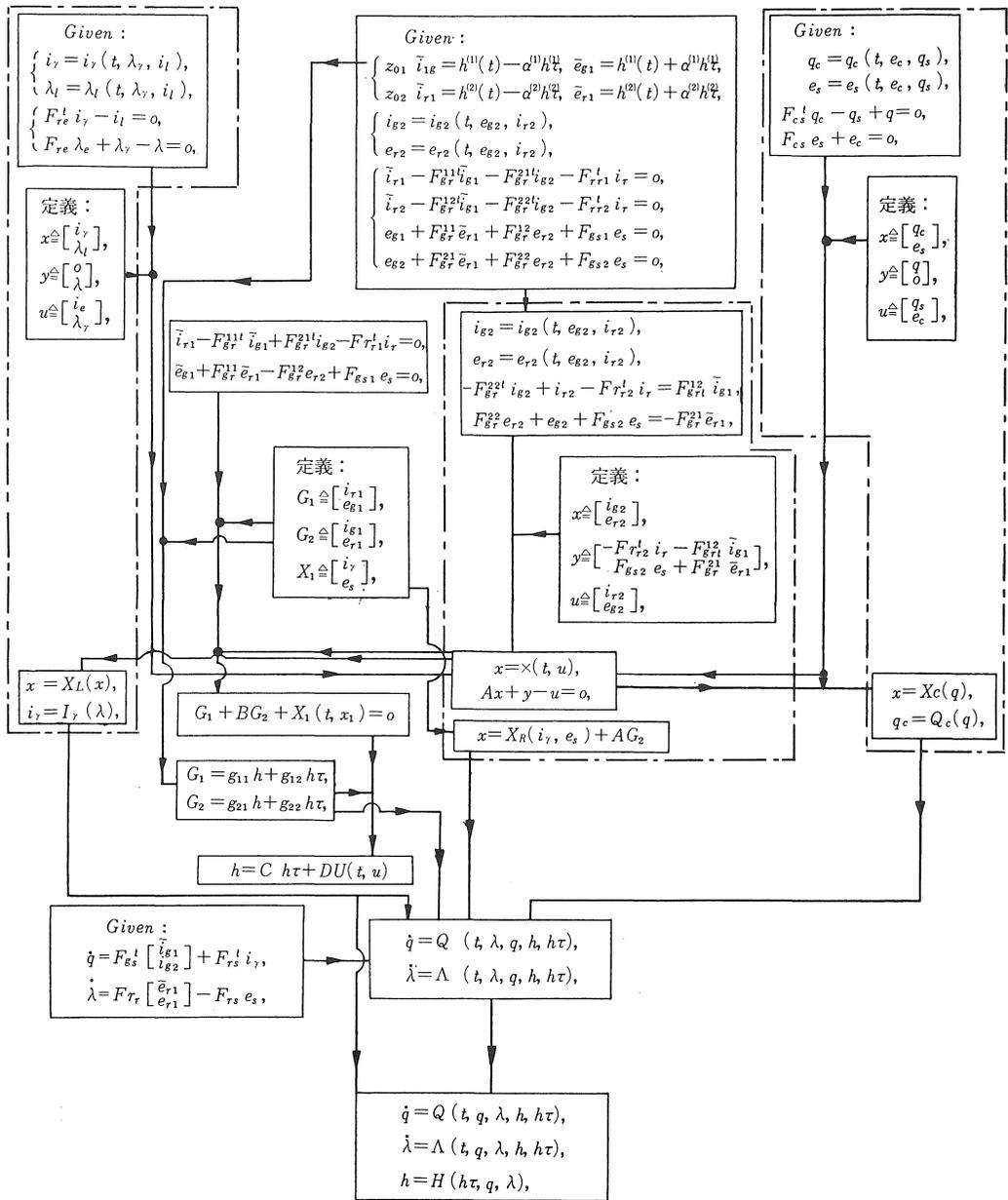


図 4. ちえん素子を含んだ回路の Normal Form 計算のための一般的なアルゴリズム

となる。この (24) と (24a) が求める Normal Form である。

1.2.4. 一般の場合; link 枝路にも, tree 枝路にもちえん素子が含まれている場合の Normal Form 構成法

この場合には, 先づ最初に(c) Resistor における関係式を次のように分解する:

(25) $f_R(t, e_R, i_R) = 0$ を:

$$(25; 1) \begin{cases} Z_{01} i_{g1} = h^{(1)}(t) - \alpha^{(1)} h_{\tau}^{(1)}, \\ \bar{e}_{g1} = h^{(1)}(t) + \alpha^{(1)} h_{\tau}^{(1)}, \\ Z_{02} i_{r1} = h^{(2)}(t) - \alpha^{(2)} h_{\tau}^{(2)}, \\ \bar{e}_{r1} = h^{(2)}(t) + \alpha^{(2)} h_{\tau}^{(2)}, \end{cases}$$

及び, ここで~は“ちえん”を意味する:

$$(25; 2) \begin{cases} i_{g2} = i_{g2}(t, e_{g2}, i_{r2}), \\ e_{r2} = e_{r2}(t, e_{g2}, i_{r2}), \end{cases}$$

に直和分割する。すなわち, link, tree 枝路共に, ちえん素子はすべて若い番号を振りあてることとする。そうすると, キ氏法則は次のように分割される。

$$(26) \begin{cases} i_{r1} - F_{g1}^{11} i_{g1} - F_{g2}^{21} i_{g2} - F_{r1}^{11} i_{r1} = 0, \\ i_{r2} - F_{g1}^{12} i_{g1} - F_{g2}^{22} i_{g2} - F_{r2}^{12} i_{r1} = 0, \\ \bar{e}_{g1} + F_{g1}^{11} \bar{e}_{r1} + F_{g2}^{21} \bar{e}_{r2} + F_{gs1} e_s = 0, \\ e_{g2} + F_{g1}^{12} \bar{e}_{r1} + F_{g2}^{22} \bar{e}_{r2} + F_{gs2} e_s = 0, \end{cases}$$

この (25;1,2) (26)を用いると図4のようなアルゴリズムが可能となる。

しかしこれは, 途中の一般式変形がすべて可能であると仮定した場合にだけ, 最後の Normal Form が得られるのであって, それが不可能な場合には, 最初からやりなほさなければならないことになる。

1. 3. 発振器の結合系について,

単独の非直線発振器については, すでにその性質もよく知られており, 特に不可思議な特性はもち得ない。しかし, そのような非直線発振器を色々な手段, 仕方, で結合すると, 単独の場合にはみられなかった興味ある性質をもつ場合が生ずる。このことは, すでにウィーナーがその著“サイバネステックス”の最後の章, 自己増殖する機械, 学習する機械の章で, 生物体のモデルとして興味ある研究対象であろうと言っている。しかし, それを我々は, ここでは数学的な立場から, その性質を深く把握しようと試みたわけである。

§.2. エサキダイオード対分布定数形発振器: 方程式の誘導

2. 1. 回路並びに回路パラメーター

回路は, 図5に示す如くである。この回路のパラメータ及び電圧電流変数について下に列記しておく:

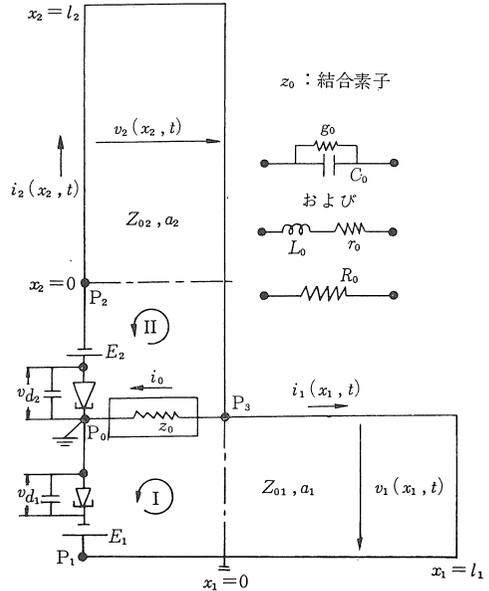


図 5. 回路図

すなわち:

- $x_i (i=1, 2)$: 距離, (メートル).
- t : 時間, (秒).
- $v_i(x_i, x), i_i(x_i, t)$: 分布線路の電圧, 電流, (ボルト, アンペア).
- $v_{di}(t), f_i(v_{di})(i=1, 2)$: EDの電圧, 電流, (ボルト, アンペア).
- $v_0(t), i_0(t)$: 結合素子の電圧, 電流.
- (27) $L_i, C_i, R_i, G_i (i=1, 2)$: 線路の夫, 単位長当たりのインダクタンス etc., ($H/m, F/m, \Omega/m, \Upsilon/m$).
- l_i : 線路の長さ, (メートル)
- $C_{di}, E_i (i=1, 2)$: ダイオードの並列容量, 並びに直流バイアス電圧, (F, Volt)
- L_0, C_0, R_0 : 結合用のインダクタンス, キャパシタンス, 及び抵抗;

更に以下では, 次のように規格化された無次元のパラメーター, 変数を用いる:

$$\begin{cases} a_i \triangleq 1/\sqrt{LiCi}; & Z_{0i} \triangleq \sqrt{Li/Ci}; \\ \tau_i \triangleq l_i/a_i; & \tau_0 \triangleq \sqrt{\tau_1 \tau_2}; \\ i_i \triangleq \tau_i/\tau_0 \\ \frac{R_i l_i}{Z_{0i}} \rightarrow R_i, & G_i \cdot l_i \rightarrow G_i \\ \varepsilon_i \triangleq Z_{0i} C_{di} / \tau_i (C_{di} / l_i C_i), \\ \alpha_{ci} \triangleq Z_{0i} C_0 / \tau_i (= C_0 / l_i C_i), \\ \alpha_{li} \triangleq L_0 / Z_{0i} \tau_i (= L_0 / l_i L_i), \\ \alpha_{ri} \triangleq R_0 / Z_{0i}, \quad (i=1, 2) \end{cases}$$

これらのパラメーター

$$(27a) \left\{ \begin{array}{l} \text{ターはすべて“1”と“2”とが等しくなったとき} \\ \text{には添数“i”を落して書くことにする。} \\ x_i / l_i \xrightarrow{\cong} x_i; \quad t / \tau_0 \xrightarrow{\cong} t; \\ V_i / \sqrt{Z_{0i}} \xrightarrow{\cong} V_i; \quad \sqrt{Z_{0i}} \cdot i_i \xrightarrow{\cong} i_i, \\ V_{di} / \sqrt{Z_{0i}} \xrightarrow{\cong} V_{di}; \quad \sqrt{Z_{0i}} \cdot f_i \xrightarrow{\cong} f_i; \\ E_i / \sqrt{Z_{0i}} \xrightarrow{\cong} E_i. \\ \text{(ここに記号}\xrightarrow{\cong}\text{は, この記号から後では右辺} \\ \text{は左辺の意味とする, という意味で用いる。)} \end{array} \right.$$

そうすると電信方程式は次のように書かれる：

$$(28) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot v_i + \left(t_i \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot i_i + R_i \cdot i_i = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot i_i + \left(t_i \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot v_i + G_i \cdot v_i = 0. \end{array} \right.$$

または, これをマトリックス形式で書くと：

$$(28a) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u + \left(A \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) u + B \cdot u = 0.$$

ここに,

$$(29) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad u \triangleq \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \\ u_i \triangleq \begin{bmatrix} v_i \\ i_i \end{bmatrix}, \quad (i=1, 2). \\ A \triangleq \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad Ai \triangleq \begin{bmatrix} 0 & t_i \\ t_i & 0 \end{bmatrix} \\ B \triangleq \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}, \quad Bi \triangleq \begin{bmatrix} 0 & R_i \\ G_i & 0 \end{bmatrix}, \end{array} \right.$$

とする。無損失線路では, $B=0$, であるから(28a)は：

境界条件：

$$(33) \left\{ \begin{array}{l} C_0 \text{ 結合の場合:} \\ \text{(電流側より): } \text{at } P_i (i=1, 2), \quad -i_i(0, t) = \sqrt{z_{0i}} \cdot f_i + \varepsilon_i (dv_{di}/dt); \\ \quad \text{at } P_s, \quad r_0^{-1} \cdot v_0 + \alpha_{0c} (dv_0/dt) + z_{01}^{-\frac{1}{2}} \cdot i_1(0, t) - z_{02}^{-\frac{1}{2}} i_2(0, t) = 0; \\ \text{(電圧側より): } v_i(1, t) = 0; \text{on loop I, } \sqrt{z_{01}} (v_{d1} - E_1 - v_1(0, t)) + v_0(t) = 0; \\ \quad \text{on loop II, } \sqrt{z_{02}} \cdot (v_{d2} - E_2 - v_2(0, t)) - v_0(t) = 0; \\ L_0 \text{ 結合の場合:} \\ \text{(同様に): } -i_i(0, t) = \sqrt{z_{0i}} \cdot f_i + \varepsilon_i (dv_{di}/dt); i_0(t) + z_{01}^{-\frac{1}{2}} \\ \quad i_1(0, t) - z_{02}^{-\frac{1}{2}} i_2(0, t) = 0; v_i(1, t) = 0; \sqrt{z_{0i}} (v_{d1} - E_1 - v_1(0, t)) \\ \quad + r_0 \cdot i_0(t) + \alpha_{0l} (di_0/dt) = 0; \sqrt{z_{02}} (v_{d2} - E_2 - v_2(0, t)) \\ \quad - r_0 \cdot i_0(t) - \alpha_{0l} (di_0/dt) = 0; \end{array} \right.$$

である。

R_0 結合の場合：

$$(33a) \left\{ \begin{array}{l} -i_1(0, t) = \varepsilon_1 \cdot \frac{d}{dt} v_{d1} + \sqrt{Z_{01}} \cdot f_1 (\sqrt{Z_{01}} v_{d1}), \\ -i_2(0, t) = \varepsilon_2 \cdot \frac{d}{dt} v_{d2} + \sqrt{Z_{02}} \cdot f_2 (\sqrt{Z_{02}} v_{d2}), \\ \sqrt{Z_{01} Z_{02}} \cdot i_0(t) + \sqrt{Z_{02}} \cdot i_1(0, t) - \sqrt{Z_{01}} \cdot i_2(0, t) = 0, \end{array} \right.$$

$$(28b) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u + \left(A \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right) u = 0,$$

となる。(28b)のダランベール解は：

$$(30) \quad u(x, t) = \begin{bmatrix} u_1(x_1, t) \\ u_2(x_2, t) \end{bmatrix},$$

$$(30a) \quad u_i(x_i, t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot G_i$$

$$(x_i - t/t_i) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot H_i(x_i + t/t_i),$$

である。ここで, G_i, H_i は任意関数である。

次に境界条件をキ氏法則より求める。先づ抵抗結合系の場合について, もとのままの次元の変数 (i.e. normalized されていない) で記述してみると次のようになる：

電流側より：

$$(31) \left\{ \begin{array}{l} \text{at } P_1, \quad -i_1(0, t) = C_{d1} \cdot \frac{dv_{d1}}{dt} + f_1(v_{d1}), \\ \text{at } P_2, \quad -i_2(0, t) = C_{d2} \cdot \frac{dv_{d2}}{dt} + f_1(v_{d2}), \\ \text{at } P_s, \quad -i_0(t) - i_1(0, t) + i_2(0, t) = 0, \end{array} \right.$$

電圧側より：

$$(32) \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{I} : R_0 i_0 + v_{d1} - E_1 - v_1(0, t) = 0, \\ \textcircled{II} : -R_0 i_0 + v_{d2} - E_2 - v_2(0, t) = 0, \\ \text{at } x_1 = l_1, \quad v_1(l_1, t) = 0, \\ \text{at } x_2 = l_2, \quad v_2(l_2, t) = 0, \end{array} \right.$$

次に無次元の normalized variable を用いて, 各々の結合系の場合の境界条件を書くと：

$$(33b) \begin{cases} \frac{R_0}{\sqrt{Z_{01}}} \cdot i_0 + v_{d1} - E_1 - v_1(0, t) = 0, \\ -\frac{R_0}{\sqrt{Z_{02}}} \cdot i_0 + v_{d2} - E_2 - v_2(0, t) = 0, \\ v_1(1, t) = 0, \\ v_2(1, t) = 0, \end{cases}$$

これらの境界条件を用いて, $v_{di}, g_i, (i=1, 2), v_0, i_0$ について成立する微分-差分方程式系を導くと次のようになる:(計算省略), ただし, ここで独立変数をもとのものにもどしている:

$$(34) \quad v_{di} \rightarrow v_{di}/\sqrt{z_{0i}}; E_i \rightarrow E_i/\sqrt{z_{0i}}, (i=1, 2); \dot{v}_{di} \equiv dv_{di}/dt; \sqrt{z_{0i}} \cdot g_i(-t) \triangleq G_i(t),$$

C_0 結合系:

$$(35c) \begin{cases} \varepsilon_1 \cdot \dot{v}_{d1} = -z_{01} \cdot f_1(v_{d1}) - g_1(t) - g_1(t-2t_1), \\ \varepsilon_2 \cdot \dot{v}_{d2} = -z_{02} \cdot f_2(v_{d2}) - g_2(t) - g_2(t-2t_2), \\ \alpha_{0c} \cdot \dot{v}_0 = -g_0 v_0(t) - z_{01}^{-1}(g_1(t) + g_1(t-2t_1)) + z_{02}^{-1}(g_2(t) + g_2(t-2t_2)), \\ g_1(t) = v_{d1} - E_1 + v_0(t) + g_1(t-2t_1), \\ g_2(t) = v_{d2} - E_2 - v_0(t) + g_2(t-2t_2), \quad (\text{ここで}, \alpha_{0c} = C_0/\tau_0) \end{cases}$$

L_0 結合系:

$$(35L) \begin{cases} \varepsilon_1 \cdot \dot{v}_{d1} = -z_{01} \cdot f_1(v_{d1}) - g_1(t) - g_1(t-2t_1), \\ \varepsilon_2 \cdot \dot{v}_{d2} = -z_{02} \cdot f_2(v_{d2}) - g_2(t) - g_2(t-2t_2), \\ \alpha_{0l} \cdot \dot{i}_0 = -r_0 \cdot i_0(t) + v_{d2} - E_2 - g_2(t) + g_2(t-2t_2), \\ \left(\frac{1}{z_{01}} + \frac{1}{z_{02}}\right) g_1(t) = \frac{1}{z_{02}}(v_{d1} - E_1 + v_{d2} - E_2) - i_0(t) - \left(\frac{1}{z_{01}} - \frac{1}{z_{02}}\right) \cdot g_1(t-2t_1) \\ \quad + \frac{2}{z_{02}} g_2(t-2t_2), \\ \left(\frac{1}{z_{01}} + \frac{1}{z_{02}}\right) g_2(t) = \frac{1}{z_{01}}(v_{d1} - E_1 + v_{d2} - E_2) + i_0(t) + \frac{2}{z_{01}} g_1(t-2t_1) - \left(\frac{1}{z_{02}} - \frac{1}{z_{01}}\right) \cdot g_2(t-2t_2), \quad (\text{ここで}, \alpha_{0l} = L_0/\tau_0) \end{cases}$$

R_0 結合系:

$$(35R) \begin{cases} \varepsilon_1 \cdot \dot{v}_{d1} = -z_{01} f_1(v_{d1}) - g_1(t) - g_1(t-2t_1), \\ \varepsilon_2 \cdot \dot{v}_{d2} = -z_{02} f_2(v_{d2}) - g_2(t) - g_2(t-2t_2), \\ (\alpha_{0r1} + \alpha_{0r2} + 1) \cdot \frac{g_1(t)}{z_{01}} = -(\alpha_{0r2} + 1) \cdot \frac{E_1 - v_{d1} - \alpha_{0r1} \cdot E_2 - v_{d2}}{z_{01}} \\ \quad - (\alpha_{0r1} - \alpha_{0r2} - 1) \cdot \frac{g_1(t-2t_1)}{z_{01}} + 2\alpha_{0r1} \frac{g_2(t-2t_2)}{z_{02}}, \\ (\alpha_{0r1} + \alpha_{0r2} + 1) \cdot \frac{g_2(t)}{z_{02}} = -\alpha_{0r2} \cdot \frac{E_1 - v_{d1} - (\alpha_{0r1} + 1) \cdot E_2 - v_{d2}}{z_{01}} + 2\alpha_{0r2} \cdot \frac{g_1(t-2t_1)}{z_{01}} \\ \quad - (\alpha_{0r2} - \alpha_{0r1} - 1) \cdot \frac{g_2(t-2t_2)}{z_{02}}, \quad (\text{ただし}, \alpha_{0ri} = R_0/z_{0i}, (i=1,2)) \end{cases}$$

これらの式を一般的に論ずることは困難であるので, とおいた)

次に, 特別な場合について考える.

2. 2. 特別な場合: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon; E_1 = E_2 \rightarrow E; f_1 = f_2 \rightarrow f; z_{01} = z_{02} \rightarrow z_0$ なる場合に成立する方程式系 ($i \cdot e$, 線路長のみ異なる場合: $\tau_1 \neq \tau_2$).

簡単のために次のような記号変換する:

$$(36) \begin{cases} (v_{di} - E)/z_0 \rightarrow x_i, (i=1, 2); \\ g_1(t)/z_0 \rightarrow x_3, g_2(t)/z_0 \rightarrow x_4; \\ x_i(t-2t_j) \rightarrow x_i \tau_j; v_0/z_0 \rightarrow v_0; z_0 i_0 \rightarrow i_0; \end{cases}$$

上記のように変数を変換し, さらに $x_i (= (v_{di} - E)/z_0)$ のみを含むかたちに式変形すると, 次のようにきわめて美しい, 簡単な形の式になる:(ただし, $r_0, g_0 = 0$)

L_0 結合系:

$$\begin{cases} -\alpha_l D_t \cdot (J + J\tau_1) = H_1, \\ \alpha_l D_t \cdot (J + J\tau_2) = H_2, \end{cases}$$

C_0 結合系:

$$\begin{cases} (J + J\tau_1) = -\alpha_c D_t \cdot H_1, \\ (J + J\tau_2) = \alpha_c D_t \cdot H_2, \end{cases}$$

(37L; 37C)

R_0 結合系:

$$\begin{cases} K(x_1, x_2) + K\tau_1 = -2F(x_1), \\ K(x_1, x_2) + K\tau_2 = -2F(x_2), \end{cases}$$

(37R)

または

$$(37R;a) \quad \begin{cases} -\alpha_r(J+J\tau_1)=H_1, \\ \alpha_r(J+J\tau_2)=H_2, \end{cases}$$

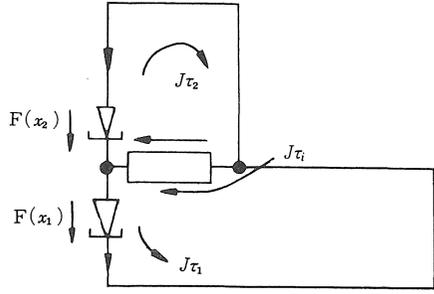


図 6. (37)式による等価回路

ただし、ここで：

$$(38) \quad \begin{cases} J \triangleq J(x_1, x_2) \triangleq F(x_1) - F(x_2), \quad (=i_0(t)), \\ J\tau_i \triangleq J(x_{1\tau_i}, x_{2\tau_i}), \\ F(x_i) \triangleq f(E + z_0 x_i) + \varepsilon \dot{x}_i, \\ x_{i\tau_j} \triangleq x_i(t - 2t_j), \\ H_i \triangleq H(x_i, x_{i\tau_i}) \triangleq F(x_i) - F(x_{i\tau_i}) + x_i + x_{i\tau_i}, \\ K_1 \triangleq K(x_1, x_2) \triangleq (\alpha_r - 1)F(x_1) - \alpha_r F(x_2) + x_1, \quad (=2x_3), \\ K_2 \triangleq K(x_2, x_1), \quad (=2x_4), \\ K_{i\tau_i} \triangleq K_i(x_{1\tau_i}, x_{2\tau_i}), \\ D_i \triangleq d/dt; \alpha_i \triangleq L_0/z_0\tau_0, \quad \alpha_c \triangleq z_0 C_0/\tau_0, \quad \alpha_r \triangleq R_0/z_0; \\ (v_{di} - E_i)/z_0 \triangleq x_i, \quad (\text{アンペア}) \\ g_i(t)/z_0 \triangleq x_{i+2}, \quad (i=1, 2) \quad (\text{アンペア}) \end{cases}$$

としている。この(37L,C,R)式から想像されるように結合 one-port のインピーダンス (またはアドミタンス) がわかっていれば、それを微分作用素環におきかえることによって、それを operator とみなして $(J+J\tau_i)$ に作用させれば、一般的な結合系の場合の方程式系は直ちに書き下すことが可能であることが知られる。これは実際、キルヒホッフの法則からも結論できる。なほ、 $J, F,$

の物理的意味は図 6 で与えられている。また、方程式 $H_i=0,$ は単独の発振器の微分-差分方程式である。

更に特別な場合として、抵抗結合系においては、次のような表現形式もまた可能である。

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \varepsilon_2, \quad \text{かつ} \quad E_1 = E_2, \quad \text{かつ} \quad f_1 = f_2, \\ \text{かつ} \quad \alpha_{r1} = \alpha_{r2} = \alpha(Z_{01} = Z_{02}). \end{aligned}$$

この場合は、(35R) は次のようになる：

$$(39) \quad \begin{cases} \varepsilon \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \\ \cdot (f[E - Zy_1], y_3(t), y_3(t-2/C), f[E - Zy_2], y_4(t), y_4(t-2C))^t, \\ (2\alpha + 1) \begin{pmatrix} y_3(t) \\ y_4(t) \\ i_0(t) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -(\alpha + 1) & -\alpha & 1 & 2\alpha \\ -\alpha & -(\alpha + 1) & 2\alpha & 1 \\ 1 & -1 & -2 & +2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t-2/C) \\ y_4(t-2C) \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{array}{l} \text{ただし,} \\ y_1 \equiv (E - v_{d1})/Z, \\ y_2 \equiv (E - v_{d2})/Z, \\ c \equiv t_1, \quad 1/C \equiv t_2, \end{array} \right) \end{cases}$$

この式から、パラメーター α の効果を次の場合に類別して考えるのが適当であろう：

$$\alpha \parallel \begin{matrix} \alpha > 1 & \alpha = 1 & 0 < \alpha < 1 \end{matrix}$$

このうち、数値解を $=1$ の場合についてくわしく求めた。

さらに、上式から、もし $C=1$ の場合には、何らかの条件が沿ったとして、 $y_1=y_2, y_4=y_3$ となると、 $i_0(t)=0,$ すなわち 2つの発振器は全く結合していないこと

になる。しかしまた、何らかのかたちで上の外的条件がくずれた場合には結合が生ずるはずである。これは非常に重要なクリチカルな場合と考えられる。

§.3. 計算ならびに計算結果

3.1. 近似解法：等価線形化—記述関数法による振幅、周波数の計算；

次に発振波形が正弦波形に近い場合について、振幅、周波数を等価線形化—記述関数法を用いて計算する。た

だし、ここでは一般の場合について取扱うのは複雑であるのでやめて、特別な場合：(37, L, C, R) 式の成立する場合、すなわち線路長のみ異なる場合、について取扱うことにする。先づ、エサキダイオード電圧—電流特性を

3次式で近似する：

$$(40) \text{ 仮定： } f(E+z_0x) \triangleq S_0x + S_2x^3,$$

(38)式は、次のように書かれる：

$$(38a) \begin{cases} J(x_1, x_2) = \varepsilon(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + S_0(x_1 - x_2) + S_2(x_1^3 - x_2^3); \\ J_{\tau i} = \varepsilon(\dot{x}_{1\tau i} - \dot{x}_{2\tau i}) + S_0(x_{1\tau i} - x_{2\tau i}) + S_2(x_{1\tau i}^3 - x_{2\tau i}^3), \\ H_i = \varepsilon(\dot{x}_i - \dot{x}_{i\tau i}) + S_0(x_i - x_{i\tau i}) + S_2(x_i^3 - x_{i\tau i}^3) + x_i + x_{i\tau i}, (i=1, 2) \end{cases}$$

ここで、

$$(41) \text{ 仮定： } x_i \simeq a_i \sin(\omega t - \phi_i), \quad (i=1, 2)$$

であると仮定して (38a) を等価線形化する*：

$$(42) \begin{cases} J = \varepsilon(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + S_0(x_1 - x_2) + \frac{3}{4}S_2(a_1^2x_1 - a_2^2x_2), \\ J_{\tau i} = \varepsilon(\dot{x}_{1\tau i} - \dot{x}_{2\tau i}) + S_0(x_{1\tau i} - x_{2\tau i}) + \frac{3}{4}S_2(a_1^2x_{1\tau i} - a_2^2x_{2\tau i}), \\ H_i = \varepsilon(\dot{x}_i - \dot{x}_{i\tau i}) + S_0(x_i - x_{i\tau i}) + \frac{3}{4}S_2a_i^2(x_i - x_{i\tau i}) + x_i + x_{i\tau i}, \end{cases}$$

さらに、

$$(43) \begin{cases} x_{i\tau j} = C_j x_i - \frac{S_j}{w} \dot{x}_i, \\ C_j \triangleq \cos 2\omega t_j, \quad \sin 2\omega t_j \triangleq S_j \quad (j=1, 2) \end{cases}$$

を考慮すると、(42) は次のようになる*：

$$(42a) \begin{cases} J \text{ は (42) 式と同じ,} \\ J_{\tau i} = (c_i - \frac{S_j}{w} D_i) \cdot J, \\ H_i = \varepsilon \dot{x}_i + (S_0 + \frac{3}{4}S_2a_i^2)x_i + x_i - (C_i - \frac{S_i}{w} D_i) \cdot \{ \varepsilon \dot{x}_i + (S_0 + \frac{3}{4}S_2a_i^2)x_i - x_i \} \end{cases}$$

*) ここでは、(42) を先づ最初に導き、次に (42a), という順序に導いているが逆の順序に導くことも可能である。しかし式変形は大変複雑になる。

$$(46C_0) \begin{cases} -j\omega a_c \cdot (A_1x_1 - A_2x_2) \\ \quad = A_1x_1 \cdot j \tan \omega t_1 + x_1, \\ j\omega a_c \cdot (A_1x_1 - A_2x_2) \\ \quad = A_2x_2 \cdot j \tan \omega t_2 + x_2. \end{cases}$$

次に、

$$(44) \text{ 仮定： } \begin{cases} x_1 \simeq a_1 e^{j\omega t}, \\ x_2 \simeq a_2 e^{j(\omega t - \phi)} \end{cases}$$

とおいて、(42a)式を記述函数化すると：

$$(42b) \begin{cases} J = A_1x_1 - A_2x_2 = (A_1\Lambda - A_2)x_2, \\ J_{\tau i} = e^{-2j\omega t_i} \cdot J, \\ H_i = \{ (1 - e^{-2j\omega t_i})A_i + (1 + e^{-2j\omega t_i}) \} \cdot x_i. \end{cases}$$

となる。ここで

$$(45) \begin{cases} A_i \triangleq S_0 + \frac{3}{4}S_2a_i^2 + j\omega\varepsilon, (i=1, 2) \\ \Lambda = \lambda e^{j\phi}, \quad \lambda \triangleq a_1/a_2, \quad x_1 \triangleq \Lambda x_2. \end{cases}$$

(44), (42b), (45) 式を用いて、各々の結合系の場合について、次の複素表示の方程式系が得られる：

C_0 結合系：

従って、この場合図7の等化回路が成立することがわ

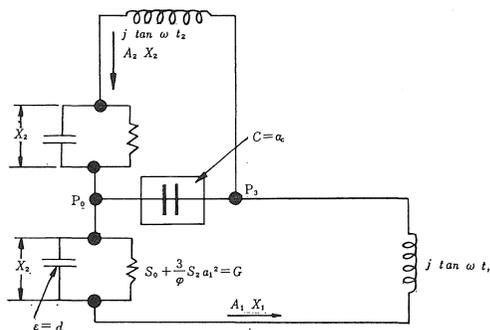


図7. 等価線形化法より求められた複素代数方程式の等価回路、 L_0, R_0 結合の場合も全く同様である。

かる。このことは、 L_0 、 R_0 結合系についても全く同様で、ただ結合素子 C_0 を L_0 、 R_0 に置き換えればよい。すなわち、次のことが確言できる：“波形が正弦波形に近い状態においては、電圧制御非直線抵抗であるエサキダイオードを等化コンダクタンス $G_i (=S_0 + \frac{3}{4}a_i^2 S_2)$ $=G_i(a)$ に置き換え、線形素子はふつうのインピーダンス解析の場合と同じ置き換えを行って計算をすれば、その回路の特長を解析することが可能である。”

3.1.1. 線路長が等しいとき、 $t_1=t_2=1$ 、の発振振幅、並びに周波数。

次に、全く相等しいちえん線路をもつ発振器を L 、 R 、で結合した場合の振幅並びに周波数を求める計算式を導こう。先づ、

3.1.1.1. L_0 結合系の場合

この場合、適当に式変形すると：

$$(47) \quad \begin{cases} x_1 = -x_2 \triangleq x, \\ x + j \cdot (\tan w + 2w\alpha_l) \cdot Ax = 0 \end{cases}$$

が得られる。(47)式の2番目の式から：

$$(48) \quad S_0 + \frac{3}{4}S_2 a^2 = 0,$$

$$(49) \quad w\varepsilon = \frac{1}{2w\alpha_l + \tan w},$$

また、(48)式から、振幅 a は：

$$(48a) \quad a = \sqrt{-\frac{4}{3} \frac{S_0}{S_2}},$$

さらに、(49)式を変形すると、

$$(49a) \quad 2\alpha_l w^2 + w \tan w = 1/\varepsilon, \quad \triangleq y(w),$$

$$(49b) \quad 1/\varepsilon w^2 - \tan w/w = 2\alpha_l.$$

となる。この(49a)、(49b)式の左辺を w の函数としてえがき、それが、夫々回路パラメータ $1/\varepsilon$ 及び $2\alpha_l$ に等しいと置くことによって、周波数 w をグラフィカルに求めることが出来る。

3.1.1.2. R_0 結合系の場合

この場合も、 L_0 結合系と全く同じ式の形をしているので、簡単な計算により：

$$(50) \quad \begin{cases} x_1 = -x_2 \triangleq x, \\ x + Ax(j \tan w + 2\alpha_r) = 0. \end{cases}$$

なる方程式が得られる。(50)の第2式の実部と虚部は夫々：

$$(51a) \quad -2\alpha_r S = 1 - \varepsilon w \tan w,$$

$$(51b) \quad -2\alpha_r w = S \cdot \tan w,$$

となる。(51a)と、(51b)から周波数 w と振幅 S とを分離すると；先づ周波数は：

$$(52a) \quad (1/\varepsilon) \cdot \frac{\tan w}{w} - \tan^2 w = (2\alpha_r)^2, \quad \triangleq y(w),$$

または

$$(52b) \quad (2\alpha_r)^2 \frac{w}{\tan w} + w \cdot \tan w = 1/\varepsilon,$$

なる方程式が得られる。この(52a)、または(52b)を用いてグラフィカルに周波数を求めることが可能である。なお、(52b)は、 L_0 結合系の(49a)に対応していて、両式を比較すると大変興味がある。次に、振幅は：

$$(53) \quad \tan \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{-\left(\frac{1}{2\alpha_r} + G\right) \cdot G} \\ = 2\alpha_r \sqrt{-\left(\frac{1}{2\alpha_r} + G\right) / G},$$

より求めることが出来る。又、(52a)より、

$$(54) \quad 1/\varepsilon \geq (2\alpha_r)^2 \quad \text{または}$$

$$(55) \quad R_0 \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Ll}{C_d}},$$

なる範囲内でのみ発振可能である。言いかえれば、 R_0 があまり大きくなりこの条件が成立しなくなると発振は停止すると考えられる。事実、これは実験的にも確かめられた。以上のうち、周波数を求めるためのグラフが図8及び図9である。この図から、 R_0 結合では結合抵抗に無関係に周波数は殆んど一定であることがわかる。

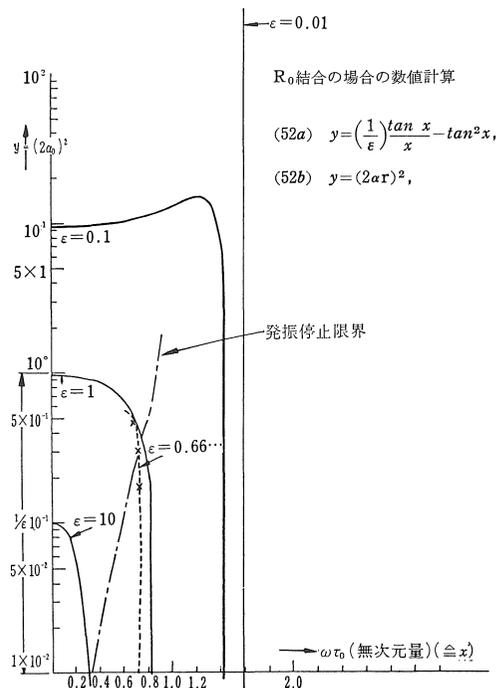


図 8. 実験結果と計算結果の比較； R_0 の結合系の場合。

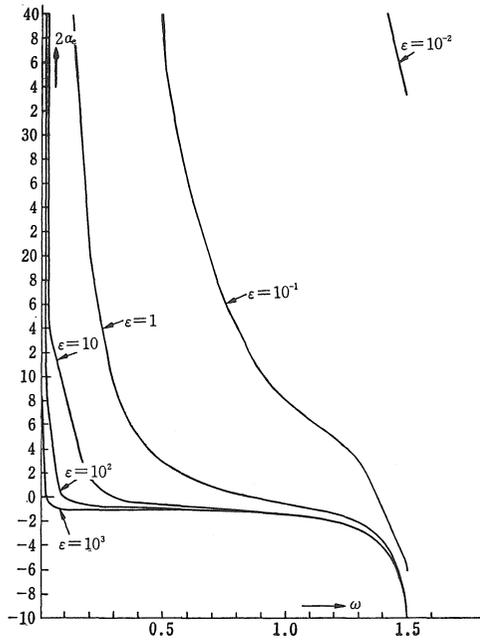


図 9. 実験結果と計算結果の比較;
L₀結合系の場合.

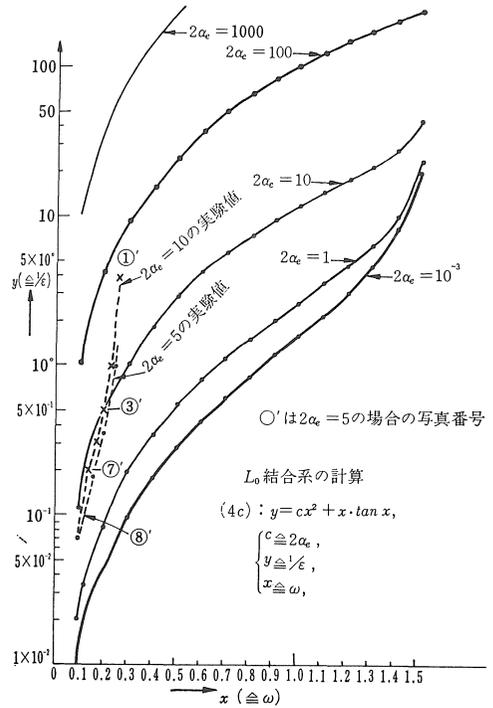


図 10. (49a) 式の数値計算;

3.1.2. C₀ 結合系についての特別な計算方法

C₀ 結合系について、やや興味ある式変形を行い、その近似式から推測される 2, 3 の予想について述べてみたい。先づ:

E. D. 特性曲線を次式で近似する:

$$(56) f(x) \approx S_0 x + S_2 x^3, \quad S_0 \leq 0, S_2 \geq 0,$$

さらに、実際の発振器では必ず逆相発振が見られるので、仮定として;

$$(57) x_3 \approx x_4,$$

とおくと、結果として

$$(58) v_0 \equiv 0; \quad x_1 = x_2, \quad (\Rightarrow \text{逆相})$$

となる。そこで (37c) は x₁ と x₂ とは全く同じ微分一差分方程式:

$$(59c) \quad 2xi = -\varepsilon(x_i - x_{i\tau_0}) + (1 - S_0)(x_i - x_{i\tau_0}) - S_2(x_i^3 - x_{i\tau_0}^3), \quad (i=1, 2), \text{ を満たす。}$$

ここで、発振波形は正弦波に近いとすると:

$$(60) \quad \begin{cases} x_i = x \approx ae^{j\omega t}, & (x_1 \equiv x_2 \equiv x_i), \\ x_{\tau_0} = ae^{j\omega(t-2\tau_0)} = xe^{-j\omega 2\tau_0}. \end{cases}$$

さらに等化線形化法を用いることにより、近似的に:

$$(61) \quad x^3 \approx \frac{3}{4} a^2 x, \quad x_{\tau_0}^3 \approx \frac{3}{4} a^2 e^{-j4\omega\tau_0} x,$$

とおけるので、結局、(59c) 式は:

$$(62c) \quad 2x = -\varepsilon(x - xe^{-j2\omega\tau_0}) + \{(1 - s_0)(1 - e^{-j2\omega\tau_0}) - \frac{4}{3} S_2 a^2 (1 - e^{-j4\omega\tau_0})\} x;$$

となる。(62c) に対応する記述関数は、次の如くである:

$$(63c) \quad 2 = -j\varepsilon\omega(1 - e^{-j2\omega\tau_0}) + \{(1 - s_0)(1 - e^{-j2\omega\tau_0}) - \frac{4}{3} S_2 a^2 (1 - e^{-j4\omega\tau_0})\},$$

ここで $\tau_0 = 1$ とおいた。(すべて時間は τ_0 で割って無次元量になおしてある。)

(63c) から、夫々実部、虚部を左右両辺で等しいとおくと:

$$(64c) \quad \text{実: } 2 = \varepsilon\omega \sin 2w + (1 - s_0)(1 - \cos 2w) - \frac{3}{4} S_2 a^2 (1 - \cos 4w),$$

$$\text{きよ: } 0 = -\varepsilon\omega(1 - \cos 2w) + (1 - s_0) \sin 2w - \frac{4}{3} S_2 a^2 \sin 4w,$$

となる。これらの式から、夫々 w 及び a を求めてみると、次のような結果が得られる:

$$(65c; \omega) \quad \begin{aligned} \epsilon w &= \frac{(1-s_0) \cdot \sin w + \frac{\cos 2w}{\sin w}}{\cos w} \\ &= -S_0 \cdot \tan w + \frac{1}{\tan w} \geq 2(-s_0)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$(65c; a) \quad \begin{aligned} a^2 &= \frac{3}{4s_2} \frac{\epsilon w \sin w \cdot \cos w + (1-s_0) \sin^2 w - 1}{\sin^2 2w} \\ &= -\frac{3s_0}{8s_2} \cdot \frac{1}{\cos^2 w} \\ \text{または;} \quad a &= \sqrt{\frac{-3s_0}{8s_2} \cdot \frac{1}{\cos w}}, \\ &\cong \sqrt{\frac{-3s_0}{4s_2}} \cong 0.9 \sqrt{\frac{|s_0|}{s_2}}, \quad \left(w \cong \frac{\pi}{4}, \text{ の場合} \right) \end{aligned}$$

これらの式から次の重要な結論（勿論、すべて近似的な結果であり、従って定量的と言うよりむしろ定性的な結論と言った方がよい）が得られる：

- C.1.° 線路長が等しい場合、周波数は負性コンダクタンスの平方根に大きざっぱには比例し、 $\epsilon (=z_0 C_d / \tau_0)$ に反比例する。
- C.2.° そして、上の場合、結合度 α_0 の効果は少ない。
- C.3.° 又、図11 からわかるように $|s_0|$ が小さいとき程 ϵ が大きいと、周波数は急に低くなる、しかし発振の安定度は $|s_0|$ が小さいとき程よい。又 $|s_0|$ が大きいときには ϵ の最小値 ϵ_{min} があり、それ以下の ϵ の値では正弦波は生起しない； *i. e.* 波形はパルス状になる。
- C.4.° しかし、 ϵ は大体範囲： $\frac{\pi}{4} - \sigma_0 < w < \frac{\pi}{4} + \sigma_0$ 、 $\sigma_0, > 0$ ；の範囲におさまっている。（ $w \cong \pi/4$ とすると、周期 $T \cong 8\tau_0$ ）

$$(67) \quad \text{仮定：} w_1 = w_2 \cong w; a_1 = a_2 \cong a; \left(x_i^3 \cong \frac{3}{4} a^2 x_i \right) \\ (f(E + z_0 x_i) \cong f(E) + S_0 x_i + S_1 x_i^3;)$$

とにおいて計算を進めた。そうすると、(38)は近似的に：

$$(68; a) \quad \begin{cases} J = \epsilon(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + S_0(x_1 - x_2) + S_2(x_1^3 - x_2^3), \\ \quad \cong \epsilon(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + (S_0 + \frac{3}{4} S_2 a^2) \cdot (x_1 - x_2), \\ J\tau_i = \epsilon(\dot{x}_{1\tau_i} - \dot{x}_{2\tau_i}) + S_0(x_{1\tau_i} - x_{2\tau_i}) + S_0(x_{1\tau_i}^3 - x_{2\tau_i}^3), \\ \quad \cong (S_0 - S_2 x_{1\tau_i} x_{2\tau_i}) \cdot (x_{1\tau_i} - x_{2\tau_i}) + \epsilon(\dot{x}_{1\tau_i} - \dot{x}_{2\tau_i}) \\ \text{または} \cong (S_0 + \frac{3}{4} S_2 a^2) \cdot (x_{1\tau_i} - x_{2\tau_i}) + \epsilon(\dot{x}_{1\tau_i} - \dot{x}_{2\tau_i}), \\ Hi \cong \epsilon(\dot{x}_i - \dot{x}_{i\tau_i}) + (S_0 + \frac{3}{4} S_2 a^2 + 1)x_i - (S_0 + \frac{3}{4} S_2 a^2 - 1)x_{i\tau_i}, \end{cases}$$

$$(68; b) \quad K = \alpha_r \epsilon(x_1 - x_2) + \alpha_r S_0(x_1 - x_2) + \alpha_r S_2(x_1^3 - x_2^3) - (S_0 x_1 + S_2 x_1^3 + \epsilon x_1 - x_1),$$

さらに、記述函数法を用いるために、 x_1, x_2 を次のように仮定する：

$$(68) \quad x_1 \triangleq a e^{j\omega t}; x_2 \triangleq a e^{j(\omega t + \phi)} = x_1 e^{j\phi},$$

これを用いて、(68; a), (68; b) を記述函数化すると、

- 4.5.° 振幅 a は、周波数が増加するにつれて増加する。又、振幅は S_0 と S_2 の両方に関係して変化し、それは大体、(65C; a) 式で与えられる値をもつ。(65C; w) の右辺を色々な S_0 について、 $w (0, \pi/2)$ の範囲でえがいた曲線が図11である。

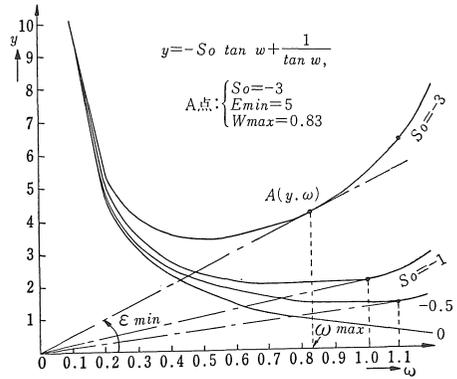


図 11. 式 (65C; w) の右辺 y と w との関係から w の値を図式的に求める図；

- 3.1.3. $\tau_2 - \tau_1 \triangleq \Delta\tau, \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2) \doteq \tau_0$, なる場合：等化線形化法及び記述函数法による周波数、位相角、振幅の近似式：

波形が正弦波に近いと仮定できる場合について、周波数、位相角、振幅等を求めてみる。先づ：(第1近似として)

$$(66) \quad \begin{cases} x_1 \cong a_1 \sin \omega_1 t, \\ x_2 \cong a_2 \sin(\omega_2 t - \phi), \end{cases}$$

とにおいて等化線形化を行う。所が、さらに周波数は大体両発振電圧が等しく、かつ振幅も大体等しいので：

$$(68; c) \begin{cases} J+J_{\tau i} = A \cdot (1+w_i) \cdot \Phi \cdot x_1 \\ H_1 = A \cdot (1-w_1) + (1+w_1), \quad // \\ H_2 = \{A \cdot (1-w_2) + (1+w_2)\} \cdot (1-\Phi), \quad // \end{cases}$$

$$(68; d) \begin{cases} K = \alpha_r A \Phi - (A-1), \quad F(x_1) = A, \quad // \\ K_{\tau i} = \{\alpha_r A \Phi - (A-1)\} w_i, \\ F(x_2) = A(1-\Phi), \quad // \end{cases}$$

これらの式を用いて、(37L; 37c; 37R) から周波数、位相角、振幅を求めることが出来る。しかし、結果を見るとR₀結合の場合以外は、少しおかしな式になり等化線形化法そのものの限界があることがわかる。その前に、(68; c), (68; d) 式及び後で用いた簡単に式を表現するための記号を書いておく：

$$(69) \begin{cases} A \equiv j\varepsilon w + S_0 + \frac{3}{4} S_2 a^2, \\ \Phi = 1 - e^{j\phi} \\ w_i \equiv \cos 2\omega\tau i - j \sin 2\omega\tau i, \quad (i=1, 2) \\ W_i \equiv \frac{1-w_i}{1+w_i} = j \tan \omega\tau i \equiv T_{w_i} \end{cases}$$

L₀ 結合系の場合：

L₀ 結合系の場合に (68) 式を用いて、(37L) 式を複素形式に書くと次のようになる：

$$(70; L) \begin{cases} -j\alpha_l w \Phi = T_{w_1} + A^{-1}, \quad \dots (70; L; 1) \\ j\alpha_l w \Phi = (T_{w_2} + A^{-1}) \cdot (1-\Phi), \\ \dots (70; L; 2) \end{cases}$$

この式から ϕ, w, a を求めると、先づ：

$$(70; L; 2) / (1-\Phi) - (70; L; 1) :$$

$$\left(\Phi + \frac{\Phi}{1-\Phi} \right) \cdot j\alpha_l w = T_{w_2} - T_{w_1},$$

$$\Phi + \frac{\Phi}{1-\Phi} = -2j \sin \phi, \quad \text{したがって,}$$

$$(71; L) \quad \sin \phi = j \frac{1}{\alpha_l w} (\tan \omega\tau_2 - \tan \omega\tau_1) \\ \cong j \frac{\Delta\tau}{\alpha_l \cos^2 \omega\tau_0},$$

この式は、実=きよということであるから少々変であるが、絶対値は両辺で等しいと考えると数量的には或る程度正しい式のように思われる。猶、周波数、及び振幅の式は、

$$(72; L) \quad -\varepsilon w = \frac{1}{\alpha_l w (\cos \phi - 1) - \frac{\tan \omega\tau_1 + \tan \omega\tau_2}{2}},$$

$$\text{または} \quad \cong \frac{1}{\alpha_l w (\cos \phi - 1) - \tan \omega\tau_0},$$

$$\text{または} \quad \cong -\frac{1}{\tan \omega\tau_0} \quad (\phi=0 \text{ のとき}),$$

$$(73; L) \quad a \cong \sqrt{-\frac{4}{3} \frac{S_0}{S_2}},$$

C₀ 結合系：

$$(70; c) \begin{cases} j\Phi / \alpha_c w = T_{w_1} + A^{-1} \\ -j\Phi / \alpha_c w = (T_{w_2} + A^{-1}) \cdot (1-\Phi) \end{cases}$$

結局 (70; L) において、 $j\alpha_l w \longleftrightarrow 1/j\alpha_c w$ なる置き換えをすればよいだけである：したがって

$$(71; c) \quad \sin \phi \cong j \frac{\Delta\tau}{\alpha_c} \frac{w^2}{\cos^2 w},$$

$$(72; c) \quad -\varepsilon w = \frac{\alpha_c}{w w \tan \omega\tau_0 - (\cos \phi - 1)},$$

(73; c) (73; L) に同じ

R₀ 結合系：

$$(70; R) \begin{cases} \alpha_r \Phi - \frac{A-1}{A} = \frac{1}{1+w_1} \\ -\alpha_r \frac{\Phi}{1-\Phi} - \frac{A-1}{A} = \frac{1}{1+w_2} \end{cases}$$

$$(71; R) \quad \sin \phi = -\frac{1}{4\alpha_0} (\tan \omega\tau_2 - \tan \omega\tau_1)$$

$$\cong -\frac{\omega}{4\alpha_r \cos^2 \omega\tau_0} \Delta\tau,$$

$$(72; R) \quad \varepsilon w = -\frac{1}{\tan \omega\tau_0}$$

$$(73; R) \quad a \cong \sqrt{-\frac{4}{3} \frac{S_0}{S_2}}$$

以上から、少くとも等化線形化法の適用可能な範囲内では次の点のはっきりする。

3.1° 振幅及び周波数は結合度には関係しない。

3.2° 位相角 ϕ は周波数及び線路長の差に関係するが、L結合の場合には、 $\Delta\tau$ が小さいときは殆んど $\phi=0$ である。

3.2. 電子計算機による計算結果：

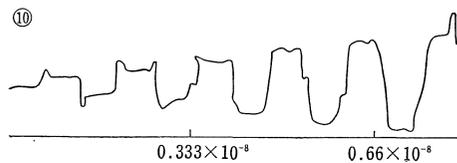
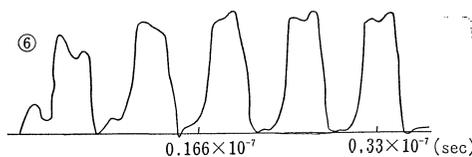
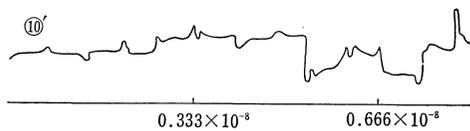
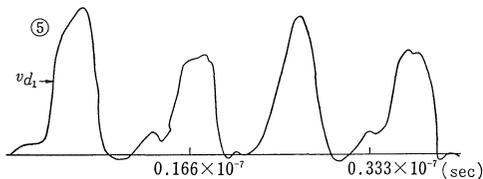
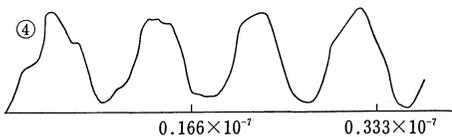
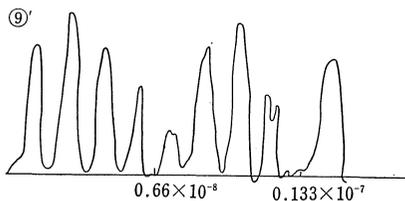
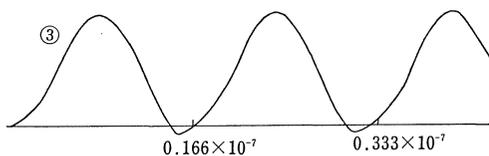
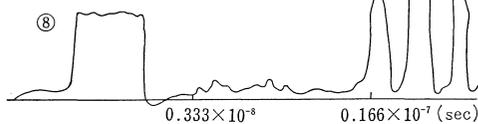
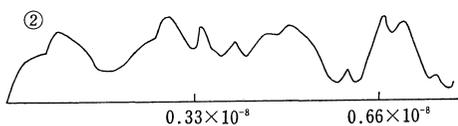
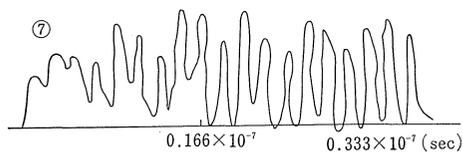
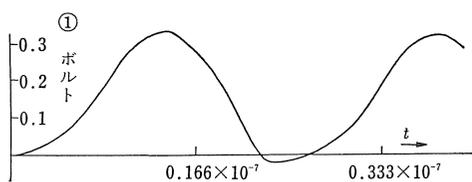
特殊な場合についての電子計算機による数値解

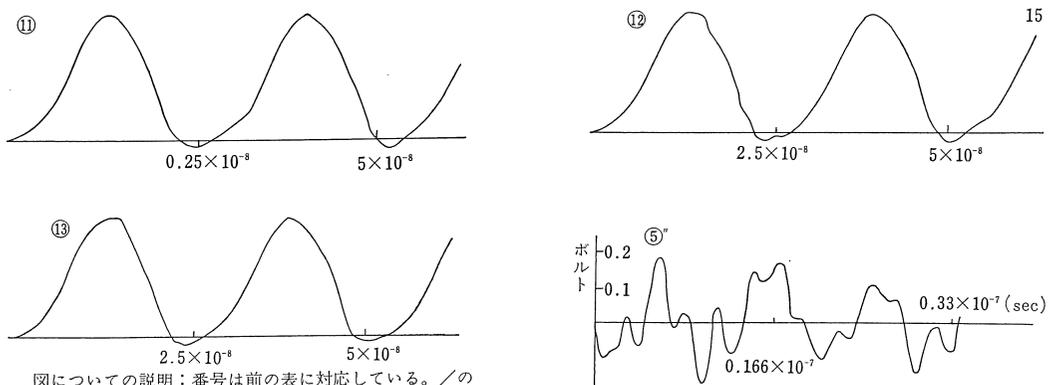
3.2.1. 抵抗結合系の場合：

次に、電子計算機を用いて数値解を求めて見た。ただし、すべての場合についていろいろ計算して検討するには時間を要するので、(i) $\alpha_r=1, t_1=0.5$ の場合について ε の効果を見る、(ii) $t_1=1, \varepsilon=15$ の場合について α_r の効果を見る、この2 Case について検討して見た。実際に行なった場合の回路パラメーターは下記のようなる：

図 番 号	l_1 (cm)	l_2 (cm)	a (cm/sec)	E (V)	$C_d=C_{di}$ (F)	R_0 ($=\Omega$)	t_1	α_r	ε
①	40	10	3×10^{10}	0.15	0.3×10^{-9}	50	0.5	1	22.5
②	40	10	3×10^{10}	0.15	0.3×10^{-10}	20	0.5	4	22.4
③	40	10	3×10^{10}	0.15	0.3×10^{-9}	20	0.5	1	9.0
④	40	10	3×10^{10}	0.15	0.3×10^{-9}	55	0.5	1	2.3

図 番	面 号	l_1 (cm)	l_2 (cm)	a (cm/sec)	$E(V)$	$C_d=C_{di}$ (F)	R_o ($=\Omega$)	t_1	α_r	ϵ
⑤		40	10	3×10^{10}	0.15	0.3×10^{-10}	50	0.5	1	2.3
⑥		40	10	3×10^{10}	0.15	0.3×10^{-10}	20	0.5	1	0.9
⑦		40	10	3×10^{10}	0.15	0.3×10^{-10}	5	0.5	1	0.23
⑧		40	10	3×10^{10}	0.15	0.3×10^{-11}	50	0.5	1	0.23
⑨		40	10	3×10^{10}	0.15	0.3×10^{-11}	20	0.5	1	0.09
⑩		40	10	0.3×10^{11}	0.15	0.3×10^{-11}	5	0.5	1	0.022
⑪		30	30	0.3×10^{11}	0.15	0.3×10^{-9}	20	1	0.4	15
⑫		30	30	0.3×10^{11}	0.15	0.3×10^{-9}	50	1	1	15
⑬		30	30	0.3×10^{11}	0.15	0.3×10^{-9}	5	1	1	15





図についての説明：番号は前の表に対応している。／のついた図は V_{d2} で、／のつかない図は V_{d1} である。また、たて軸はすべて、 $0.1[V/cm]$ のスケールである。横軸はそれぞれ異っている。単位は秒である。

上図は⑮の場合の結合抵抗の両端の電圧波形である。一般にこの部分の波形は非常に複雑であることがわかる。

図 12. 電子計算機を用いて求めた抵抗結合系の場合の色々なパラメーターの場合の発振波形

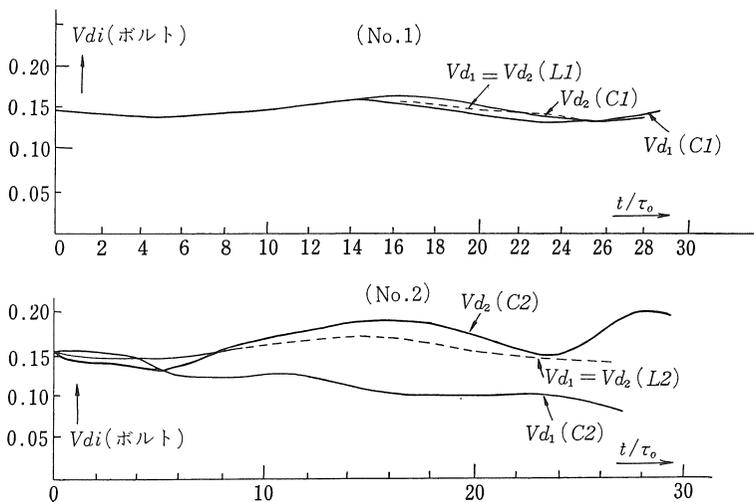
微分方程式の数値解を求めるには、ルンゲークッタ法を用いた。猶図では結合抵抗の両端の電圧は省略させていただいた。さらに、 v_{d1} と v_{d2} とは波形が特に複雑になった場合を除いては殆んど全く同一波形かつ逆相であるのでこれもまた、省略した。また、 Z_0 は書いてないが α_r と R_0 より計算出来る。

3.2.2. 容量及びインダクティブな結合系の場合

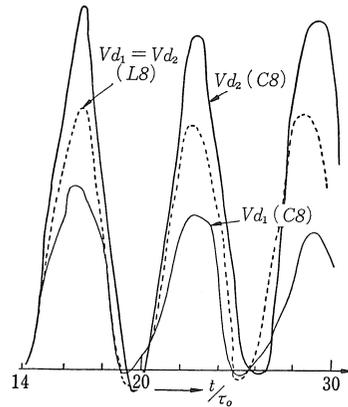
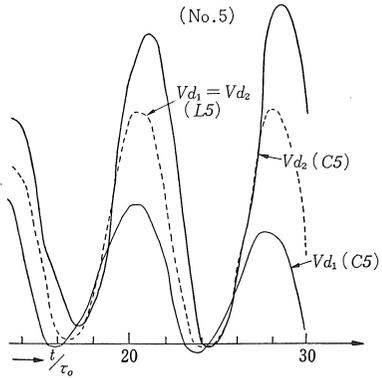
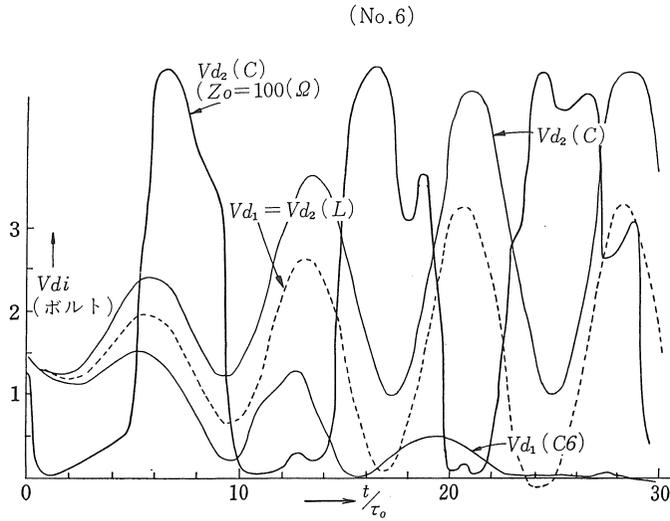
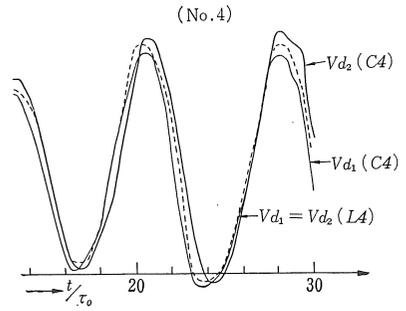
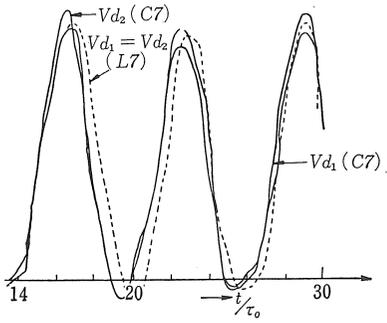
計算は、2203を用いて、R.K.G.法を用いて行った。実際に行った場合のパラメーターの値は次の第1表の如くである。これらの数値は計算が容易で、比較検討しやすい数値をえらんだ。これらのグラフから言い得ることはすでに第2節で近似解析によって得られた周波数、振幅をもつ発振が得られること、その他に次のような諸点が上げられる：

第1表 ($r_0, \text{org}_0 \approx 0$)

No.	z_{o1} オーム	z_{o2} オーム	τ_1	τ_2	Ei ボルト	ϵi	α_{corl}
1	10	10	1	1	0.15	10	10
2	〃	〃	〃	〃	〃	10	1
3	〃	〃	〃	〃	〃	10	0.5
4	〃	〃	〃	〃	〃	1	10
5	〃	〃	〃	〃	〃	1	1
6	〃	〃	〃	〃	〃	1	0.5
7	〃	〃	〃	〃	〃	0.5	10
8	〃	〃	〃	〃	〃	0.5	1
9	〃	〃	〃	〃	〃	0.5	0.5
10	〃	〃	4	1	〃	1	10
11	〃	〃	4	1	〃	0.1	10



(No.3)はNo.2に殆んど同じである。



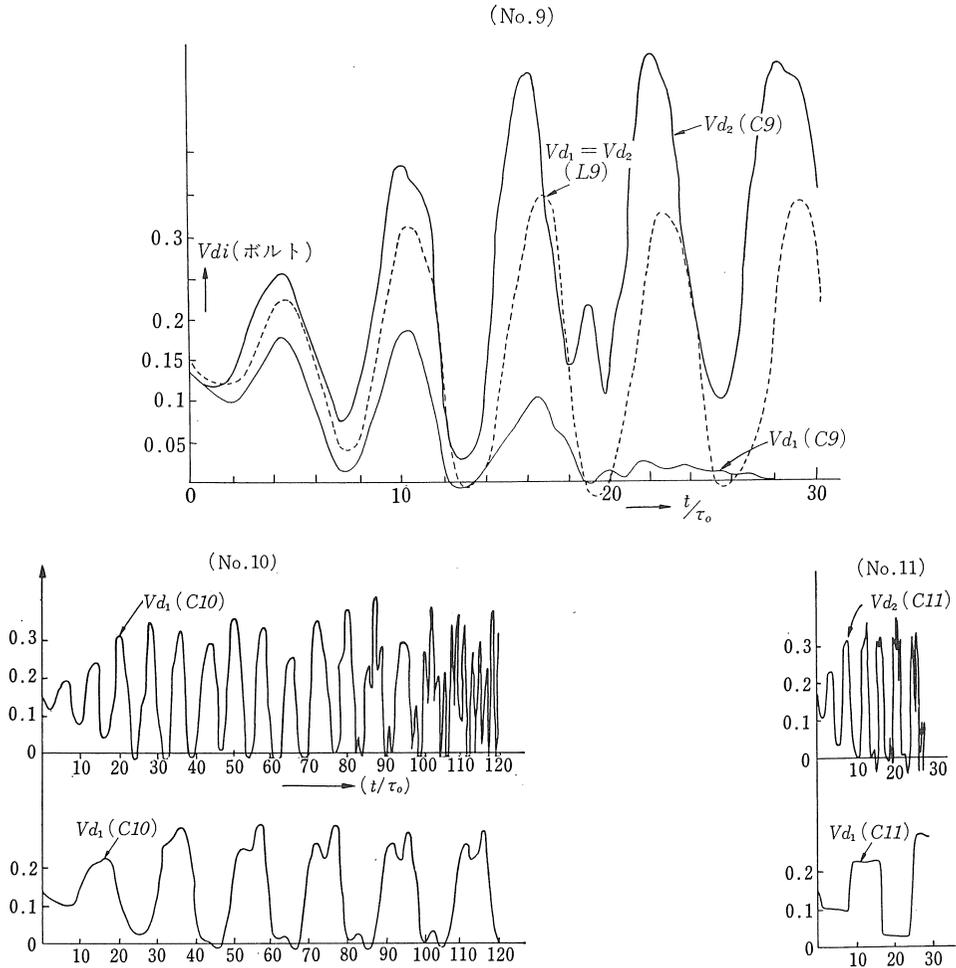
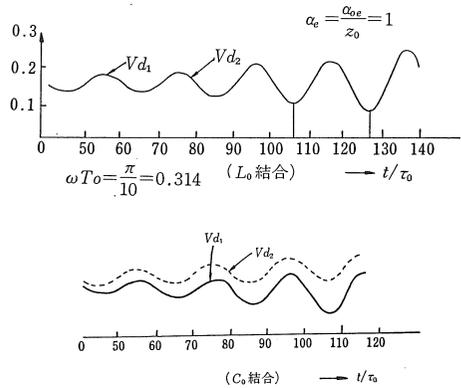


図 13. 電子計算機を用いて求めた発振波形 L_0 , C 結合系の場合

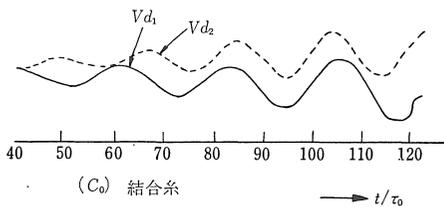
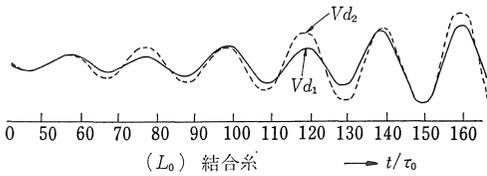
3.2.° 容量結合の場合は、 α_c の値が小さくなるに従って、両方の発振状態の不均衡が次第に大きくなる：しかしインダクタ結合の場合には完全に平衡であり決してそのようなことは起り得ない。ここではリーク抵抗 r_0 を無視した。

3.2.3. 3.2.2. と同じ場合で、しかも線路長が異なる場合

$\epsilon_1^{-1} = 0.1$	$\epsilon_2^{-1} = 0.1$
$z_1 = 10$	$z_2 = 10$
$t_1 = 1.1$	$t_2 = 0.9$
$E_1 = 0.15$	$E_2 = 0.15$
$\alpha_l^{-1} = 0.1$	$r_0 = 0$



$$\begin{aligned} \epsilon_1^{-1} &= 0.1 & \epsilon_2^{-2} &= 0.1 \\ z_1 &= 10 & z_2 &= 10 \\ t_1 &= 1.3 & t_2 &= 0.8 \\ E_1 &= 0.15 & E_2 &= 0.15 \\ \alpha_l^{-1} &= 0.1 & r_0 &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \epsilon_1^{-1} &= 50 & \epsilon_2^{-1} &= 50 \\ z_1 &= 10 & z_2 &= 10 \\ t_1 &= 1.1 & t_2 &= 0.9 \\ \alpha_l^{-1} &= 3.5 & E_2 &= 0.15 \\ E_2 &= 0.15 \end{aligned}$$

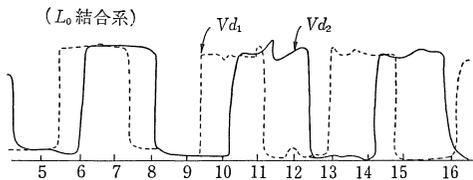
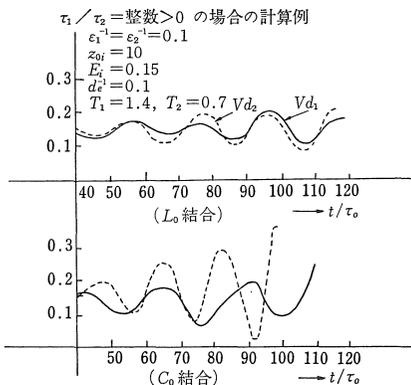


図 14. 図12, 13, に同じ. 線路長が異なる場合

3.2.4 $\tau_1/\tau_2 = \text{整数} > 0$ の場合の計算例



3.2.5. 計算結果から予想される発振器の特長について

上の近似解法による計算式 (52a), 及び (49b) 式を用いて, 周波数を求めるためにグラフにしたのが 図 8 及び 図 9 である. さらに, 最初に導いた微分-差分方程式系の Normal Form を用いて, 2, 3 の数値例について電子計算機を用いて, Runge-Kutta 法により発振波形を求めたのが 図 13, 14 である. これらの電子計算機による波形計算と, 等価線形化法による回路パラメータと周波数との関係を求めるための表とを総合比較してわかることは: 1) 波形が正弦波に近い発振波形の状態では, 結合素子の如何に関係なく等価線形化-記述函数法による結果は, かなりよく数値計算の結果と一致する. しかるに, 一たん波形がパルス状になった発振状態では, 多様な発振モードをもつ. (これは実験結果からも確かめられる) 2) この発振器の発振波形は, 単独のちえん線路をもつ発振器と比較すると, エサキダイオード電圧-電流特性との尖頭部分と谷底部分との非対称性の影響が少くなり, 正弦波発振状態では高調波分が少なくなり, パルス波発振状態では矩形波波形に近くなる. 3) 最後に, この発振器の特長をつかむには, 後に結論のところ述べるが, 等価線形化法のような linearization method と電子計算機を用いた数値解析の方法を併用することによって, 初めて全体の特徴が完全に把握できるのであって, 一方だけでは, その一部分だけしか解明できない. 等である. 以上の事実, 実験結果と合せ考えることによってさらによく理解される.

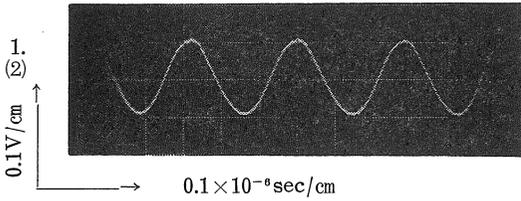
§.4. 実験 結果

実験は, 特性インピーダンス $z_0 = 75(\Omega)$ のちえんケーブルを用い, 線路長 $l = 5(m)$ 及び $10(m)$ を用いて行った.

この実験結果と, 数値解析による波形を比較してみると, 非常によく一致している. 従って, 電子計算機を用いて直接計算し, それを整理して得られた結論は, 大体正しい結果であると, 判断してよいことがわかる. ただこの場合にも言えることは, 発振波形が正弦波からずれて, パルス状になると, 等価線形化-記述函数法による結果とは全くずれた値になりこのような近似解法は適用出来なくなることがわかる.

4. 1. R_0 結合系の場合;

(R_0 結合)



線路: $z_0=75(\Omega)$, $l=5(m)$, (共通)

$E_i=0.13(V)$, (: bias 電圧)

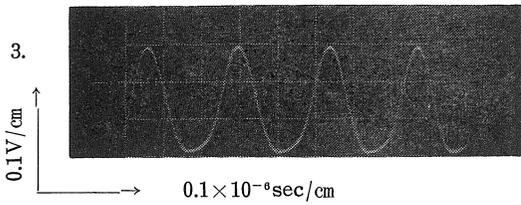
$C_d=1000(p.F.)$,

R_0 結合 (系),

R_0 : 0~5 では, 発振 (写真) 状態; 5(Ω)で発振停止,

$1/\epsilon=0.22$, $(2\alpha_r)^2=0\sim 0.017$,

(R_0 結合)



$E_i=0.13(V)$,

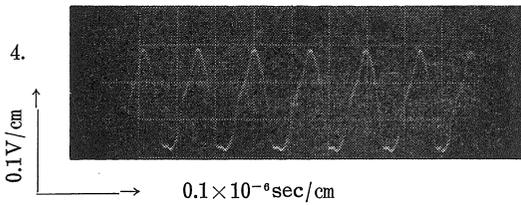
$C_d=550(p.F.)$,

R_0 結合 (系),

R_0 : 0~7では, 発振 (写真) 状態; 7(Ω)で, 発振停止,

$1/\epsilon=0.4$, $(2\alpha_r)_2=0\sim 0.04$

(R_0 結合)



$E_i=0.13(V)$,

$C_d=150(p.F.)$,

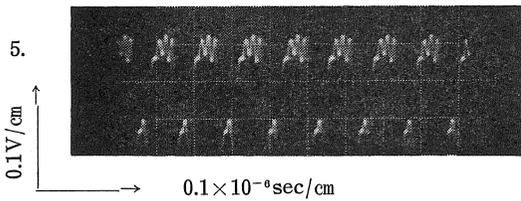
R_0 結合 (系),

R_0 : 0~20では, 発振 (写真) 状態;

20(Ω)で, 発振停止,

$1/\epsilon=0.44$, $(2\alpha_r)^2=0\sim 0.28$

(R_0 結合)



$E_i=0.13(V)$,

$C_d=50(p.F.)$,

R_0 結合 (系),

R_0 : 0~150では, 発振 (写真) 状態;

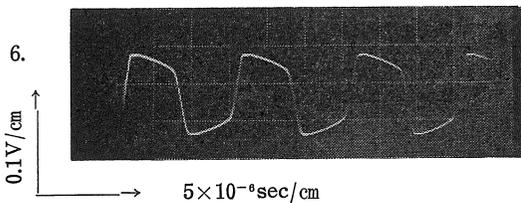
150(Ω)で, 発振停止,

$1/\epsilon=4.4$, $(2\alpha_r)^2=0\sim 16$,

図 15.

4. 2. L_0 結合系

(L_0 結合)



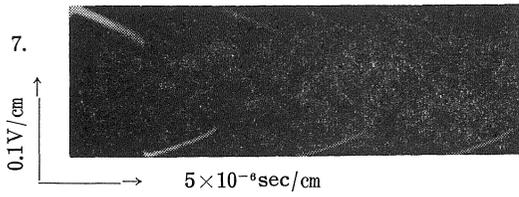
線路: $z_0=75(\Omega)$, $l=5(m)$, (共通)

$E_i=0.13(V)$, (: bias 電圧),

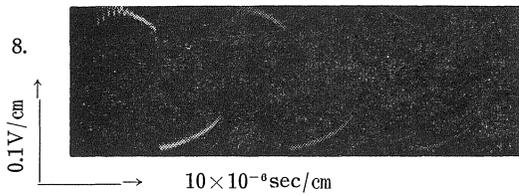
$C_d=0.01(\mu F)$,

$L_0=200(\mu H)$,

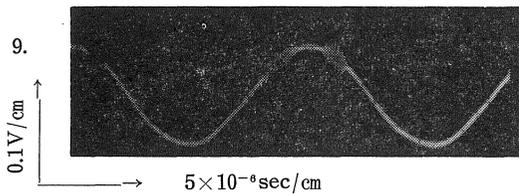
$1/\epsilon=2.2 \times 10^{-2}$, $2\alpha_l=32$,

(L_o 結合)

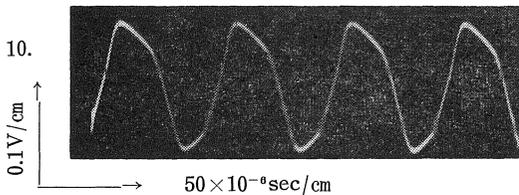
$E_i = 0.13(V)$, (: bias 電圧),
 $C_d = 0.001(\mu F)$,
 $L_o = 200(\mu H)$,
 $1/\varepsilon = 2.2 \times 10^{-1}$, $2\alpha_l = 32$,

(L_o 結合)

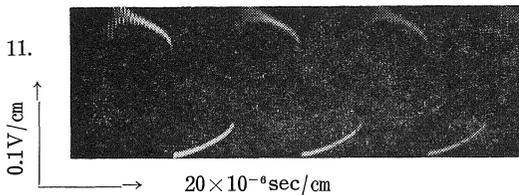
$E_i = 0.13(V)$,
 $C_d = 150(p.F.)$,
 $L_o = 200(\mu H)$,
 $1/\varepsilon = 1.48$, $2\alpha_l = 32$,

(L_o 結合)

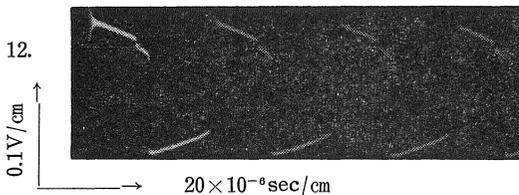
$E_i = 0.13(V)$,
 $C_d = 0.1(\mu F)$,
 $L_o = 200(\mu H)$,
 $1/\varepsilon = 2.2 \times 10^{-3}$, $2\alpha_l = 32$,

(L_o 結合)

$E_i = 0.13(V)$
 $C_d = 0.1(\mu F)$
 $L_o = 1000(\mu H)$,
 $1/\varepsilon = 2.2 \times 10^{-3}$, $2\alpha_l = 160$,

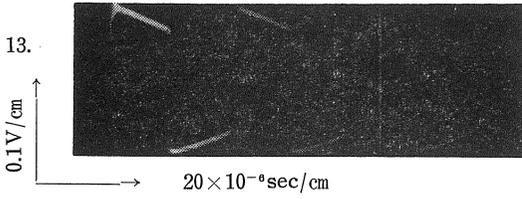
(L_o 結合)

線路 : $75(\Omega)$, $5(m)$,
 $E_i = 0.13(V)$,
 $C_d = 0.01(\mu F)$,
 $L_o = 1000(\mu H)$,
 $1/\varepsilon = 2.2 \times 10^{-2}$, $2\alpha_l = 160$,

(L_o 結合)

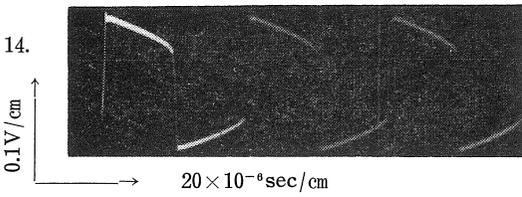
$E_i = 0.13(V)$,
 $C_d = 0.001(\mu F)$,
 $L_o = 1000(\mu H)$,
 $1/\varepsilon = 2.2 \times 10^{-1}$, $2\alpha_l = 160$,

(L_0 結合)



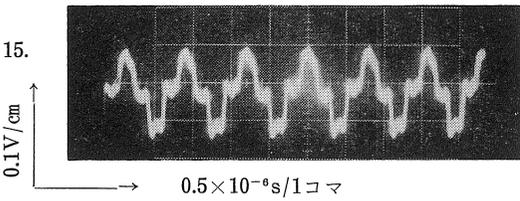
$E_i = 0.13(V)$,
 $C_d = 150(p.F.)$,
 $L_0 = 1000(\mu H)$,
 $1/\epsilon = 1.48, 2\alpha_l = 160$,

(L_0 結合)



$E_i = 0.13(V)$
 $C_d = 50(p.F.)$
 $L_0 = 1000(\mu H)$,
 $1/\epsilon = 4.4, 2\alpha_l = 160$,

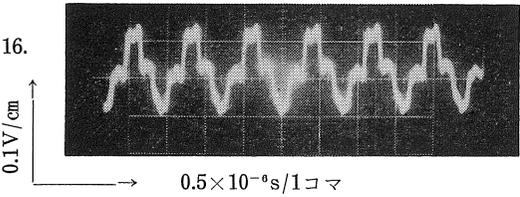
(L_0 結合系)



線路: $z_0 = 75(\Omega), l = 10(m)$,
 $C_d = 100, (p.F.) 1/\epsilon = 4.44$,
 $2\alpha_l = 5$,
 $(f = 1.25(Mc))$,
 $E_i = 0.15(V)$

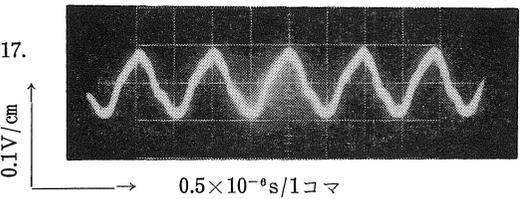
(L_0 結合系)

① に同じ;



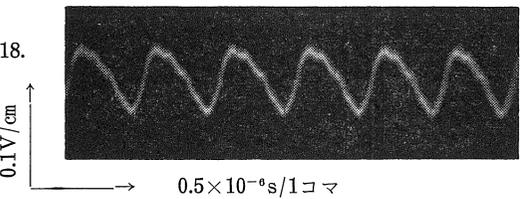
(L_0 結合系)

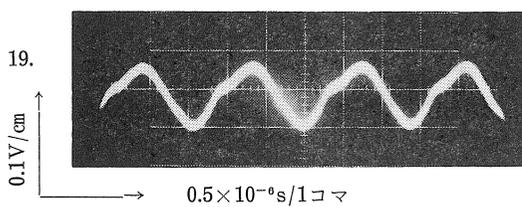
$C_d = 1000(p.F.)$, $1/\epsilon = 0.44$,
 $2\alpha_l = 5$,
 $(f = 1.05, (Mc))$



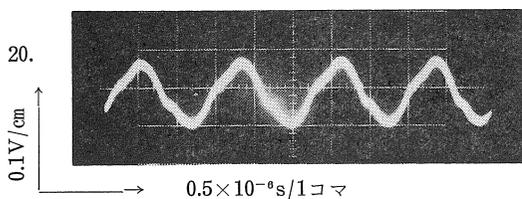
(L_0 結合系)

$C_d = 500(p.F.)$, $1/\epsilon = 0.890$,
 $2\alpha_l = 5$,
 $(f = 1.18)$

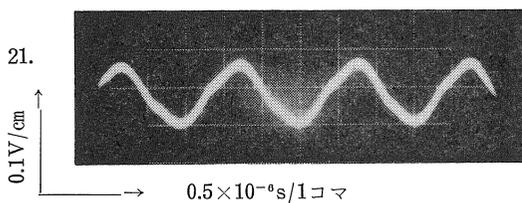


(L₀ 結合系)

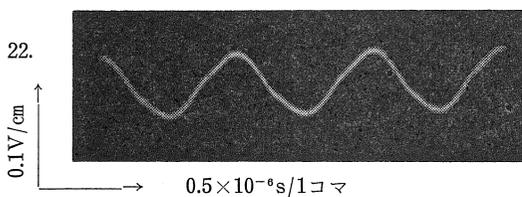
$C_d=1500(p.F.)$, $1/\varepsilon=0.296$,
 $2\alpha_1=5$,
 $(f=0.83, (Mc))$

(L₀ 結合系)

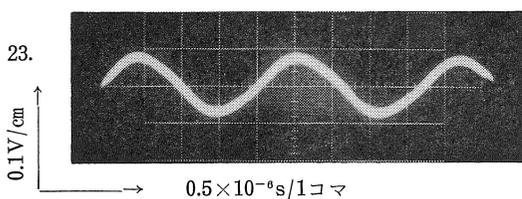
$C_d=2000(p.F.)$, $1/\varepsilon=0.212$
 $2\alpha_1=5$,
 $(f=0.77, (Mc))$

(L₀ 結合系)

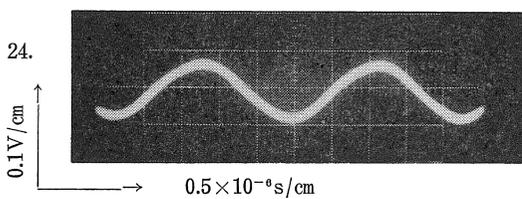
$C_d=3000(p.F.)$, $1/\varepsilon=0.148$,
 $2\alpha_1=5$,
 $(f=0.67, (Mc))$

(L₀ 結合系)

$C_d=4000(p.F.)$, $1/\varepsilon=0.111$,
 $2\alpha_1=5$,
 $(f=0.59)$

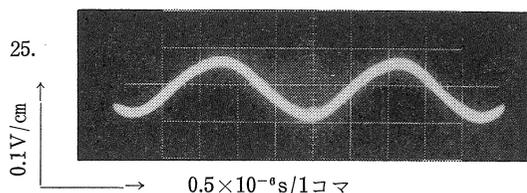
(L₀ 結合系)

$C_d=5000(p.F.)$, $1/\varepsilon=0.089$
 $2\alpha_1=5$,
 $(f=0.53)$

(L₀ 結合系)

$C_d=7000(p.F.)$, $1/\varepsilon=0.064$
 $2\alpha_1=5$,
 $(f=0.46, (Mc))$

(L_0 結合系)



$$C_d = 8000(p.F.)$$

$$2\alpha_1 = 5,$$

$$(f = 0.42, (Mc))$$

図 16.

§.5. 結 論

結1°) 結合型発振器では、並列容量など線路長以外の回路パラメーターが相等しい場合には：

- 1°. a) 両ダイオードの相互の向き関係,
- 1°. b) 両線路長の比,
- 1°. c) 結合用1ポートの種類、及び大きさ、などに無関係に、“特に、極端な条件の場合を除いては”^{*} 必ず両ダイオードの電圧は逆相発振が起る。

^{*}特に極端な場合とは：1) 極端に線路長比が異なるとき；2) $\varepsilon \cong 0$ ；3) $R_0 \cong 0, R_0 \cong \infty$, なるときである。

以上のことから、この回路は、位相ロック回路として使用可能である。

結2°) 等化線形化—記述函数法による取扱いは、非線形抵抗の場合には、もとの回路網を次の等化回路網に置き換えることである：エサキダイオードは、 $G=G(a)$ なるコンダクタンスとし、線形素子は普通の複素表示とする。

結3°) 正弦波に近い発振波形の状態では、等化線形化—記述函数法解析から求められた w ：周波数、振幅は、実験ならびに数値計算結果と、充分よく一致する。逆に、非正弦波状 (*i. e.* パルス状) の発振が起っているときには、等化線形化—記述函数法より求めた周波数、振幅と実験値とは一致しなくなる。

結4°) 従って、パルスが発生するための条件は：a) C_d が充分小さい, b) 線路長が充分長いとき, などである。

結5°) 抵抗結合系は次の特質をもつ：a) R_0 の値に無関係に発振周波数一定；b) 発振領域： $1/\varepsilon > (2\alpha_r)^2$, があり、これ以外の条件のところでは発振は停止する；c) バイアス電圧値が非常に複雑に影響を与える。

結6°) C_0 結合系では安定した発振が生起しにくい。しかしランダムパルスの発生器としては適当である。

以上この種のタイプに属する発振器の基本的な発振器について、筆者の調べた範囲内での特質について述べた。しかし猶、次の点についてはいまだ充分よく研究されているとは言い難い。すなわち 1) パルスが発生するための回路パラメーターならびに、そのときの発振周波

数と回路パラメーターとの函数関係、2) 単安定状態から過渡状態への推移過程の詳細な性質、3) 線路長の異なる場合についての詳しい研究、などである。しかし、この論文でなされた範囲の研究でも、充分実用上有益な性質が判明したと思われる。特に、以上の結論で述べたように、発振器の位相ロックキング、対称な正弦波、並びにパルス発振器などの応用には充分役立つものと確信している。

参 考 文 献

- 1) J. Nagumo and M. Shimura: “Self-oscillation in a transmission line with a Tunnel Diode” Pro I.R.E., Vol. 49.8, p. 1289 (Aug. 1961)
- 2) 後藤, 森末: “負性抵抗接続の分布定数回路における非線形振動の解析的理論” 電気通学会誌, 昭39. 4. Vol47
- 3) 後藤, 森末: “分布定数回路に接続された負性抵抗素子”, 通誌, 昭41. 5. Vol49. p.853
- 4) 新美: “エサキ・ダイオード対形分布定数形発振器の解析 (抵抗結合の場合)” 非直線理論研資料, 1966. 7. 26.
- 5) 新美: “エサキ・ダイオードを用いた分布形発振器のLまたはCによる結合系の発振特性の計算” 非直線理論研資料, 1967. 9. 21.
- 6) 新美: “2ヶの分布定数形発振器の結合系の解析” 非直線理論研資料, 1967. 12. 8.
- 7) Austin Blaquière: “Nonlinear System Analysis” 1966, Academic Press.
- 8) 新美: “分布形発振器の損失を考慮した場合の数値解についての一検討” 非直線委員会66年4—2
- 9) 新美, 武藤: “分布型エサキ・ダイオード発振器結合系の数値解” 昭40年電通信学会 全国大会資料；
- 10) W. Wasow: “Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations”, John Wiley & Sons. Inc. 1965 p.p. 226~313;
- 11) THOMAS E. STERN: “Theory of Non-

linear Networks and systems." 1965 Addison-Wesley.

APPENDIX

1°(35c) から (37c) 式の誘導 :

$$(1) \cdots x_3 + x_{3\tau_1} = -F(x_1);$$

$$(2) \cdots x_4 + x_{4\tau_2} = -F(x_2);$$

$$(3) \cdots x_3 - x_{3\tau_1} = x_1 + v_0;$$

$$(4) \cdots x_4 - x_{4\tau_2} = -x_2 - v_0;$$

$$(5) \cdots \alpha_{0c} v_0 = F(x_1) - F(x_2);$$

$$(1) + (3) : (6) \cdots 2x_3 = -F(x_1) + x_1 + v_0;$$

$$\text{従って (6a) } \cdots 2x_{3\tau_1} = -F(x_{1\tau_1}) + x_{1\tau_1} + v_{0\tau_1},$$

$$(1) - (3) : (7) \cdots 2x_{3\tau_1} = -F(x_1) - x_1 - v_0;$$

(7) と (6a) を等しいとおくと :

$$-F(x_{1\tau_1}) + x_{1\tau_1} + v_{0\tau_1} = -F(x_1) - x_1 - v_0,$$

従って :

$$(8) \quad v_0 + v_{0\tau_1} = -F(x_1) - x_1 + F(x_{1\tau_1}) - x_{1\tau_1}$$

$$\triangleq H(x_1, x_{1\tau_1});$$

(8) 式を t に関して微分すれば :

$$(9) \cdots v_0 + v_{0\tau_1} = (\nabla H, (x_1, x_{1\tau_1})),$$

一方, (5) 式から :

$$(10) \quad \alpha_{0c} v_{0\tau_1} = F(x_{1\tau_1}) - F(x_{2\tau_1}),$$

(5) + (10) :

$$(11) \quad \alpha_{0c} (v_0 + v_{0\tau_1}) = F(x_1) + F(x_{1\tau_1}) - F(x_2)$$

$$- F(x_{2\tau_1});$$

(11) 式と (9) 式から (37c) の上式が得られる。(37c) のもう一つの式も同様にして得られる。次に $\tau_1 = \tau_2 = \tau_0 = 1$ の場合には, (1), (3) から得られた (8) 式と同じ形でただ符号だけが異なった (8) と同じ式が得られるので, (37c) の上の式は直ちに導かれる。

2° (4) 式の近似の意味 :

これは Equivalent Linearization 法を知っていれば直ちにわかることであるが, 1つの考え方は次の如くである: 即ち $y = x^3$ なる式はヒルベルト空間の点 x_0 を, 同一空間内の他の点 x'_0 にうつす, そこで, x'_0 のベクトル x_0 上への射影: $P_{r_0} x'_0 (= x_0^3) \equiv k x_0$ となるのである。この比例係数 k を x_0 軸上へ求めればよい。具体的には,

点 x_0 として, $x_0 \cong a_0 \sin \omega t$, for $\forall a_0$

とすると $y = x_0^3 = (a_0 \sin \omega t)^3$

$$= \left(\frac{3}{4} a_0^2 \right) a_0 \sin \omega t - \frac{1}{4} a_0^3 \sin 3\omega t,$$

$$= \left(\frac{3}{4} a_0^2 \right) x_0 - \frac{3}{4} a_0^3 \sin 3\omega t,$$

$P_{r_0} x_0^3 = \left(\frac{3}{4} a_0^2 \right) x_0$, となる。詳しくは文献 7)

x_0 軸上へ

を参照のこと,