

サイリスタで制御するR.L回路の解析

加 納 敏 三

Analysis of the Series Resistance-Inductance
Circuit controlled by Thyristor.

Toshizo KANO

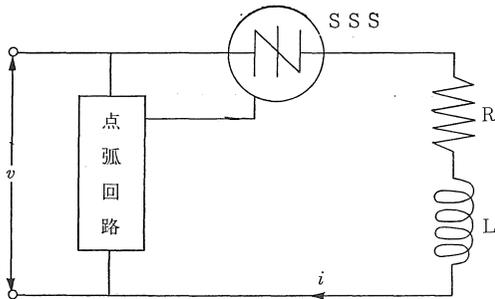
In case the single-phase A.C. in the series R-L circuit is controlled by thyristor, the phase relation between the cut-off angle and the firing one of a thyristor depends upon the load characteristic.

Generally it is somewhat difficult to get this relation, but by applying the new graphic method the above relation can be obtained easily and clearly.

1. ま え が き

サイリスタによる位相制御回路についての解析は既に色々発表されているが、実際に回路の設計を行うような場合には、複雑な計算を要する事が多い。ここではまづR.L回路に双方向性2端子サイリスタ(以下SSSと呼ぶ)を接続した場合をとりあげ、二三の仮定をおいて、点弧角と消弧角との関係の図式解析を行った。後述の図表を利用して簡単に消弧角を求める事が出来る。

2. サイリスタにより制御された電流



第1図 基本回路

第1図のようにR.L回路に $v = V_m \sin \omega t$ の電圧を加えSSSが α の位相で点弧した場合、ターンオン、ターンオフの時間及びSSSの電圧降下を無視すれば、電流 i は一般に次式で表わされる。

$$i = I_m \{ \sin(\omega t - \phi) - \sin(\alpha - \phi) e^{-(\omega t - \alpha) \cot \phi} \} \quad (1)$$

$$\text{但し } \phi = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}, \quad I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

$$\text{又 } \alpha \leq \omega t \leq \beta \quad \beta: \text{消弧角}$$

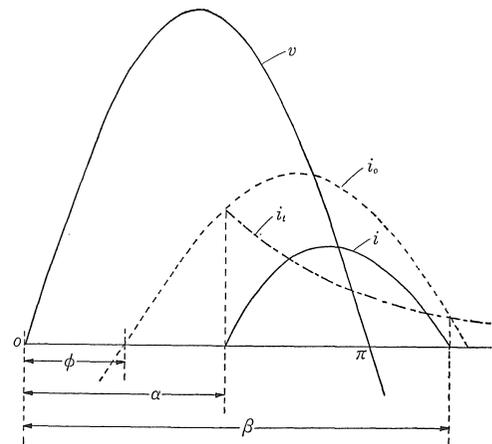
$$\left. \begin{array}{l} i_0 = I_m \sin(\omega t - \phi) \\ i_t = I_m \sin(\alpha - \phi) e^{-(\omega t - \alpha) \cot \phi} \end{array} \right\} \text{とおけば}$$

i_0 は位相制御されていない場合の定常電流を表わし、 i_t は $\omega t = \alpha, \omega t = \beta$ において i を零にする過渡項を示している。

次に $\alpha = \phi, \alpha > \phi, \alpha < \phi$ の三つの場合に分けて考察する。

3. $\alpha = \phi$ で点弧する場合

上述の $i_t = 0$ となり $i = i_0$ 。

4. $\alpha > \phi$ で点弧する場合第2図 電源電圧と電流の関係 ($\alpha < \phi$)

$\omega t = \alpha$ でSSSが点弧し、そのとき $i_t = I_m \sin(\alpha - \phi)$ となり i_t, i は第2図のように変化する。 $i = i_0 - i_t$ であるから、 $\omega t = \beta$ で $i_0 = i_t, i = 0$ になったとすればSSSは消弧して次の点弧パルスが与えられるまで電流は流れない。 $\omega t = \beta$ のとき(1)式より

$\sin(\beta-\phi) - \sin(\alpha-\phi)\varepsilon^{-(\beta-\alpha)\cot\phi} = 0$ となる。
 $\cot\phi = k$ とおき $\sin(\beta-\phi) = \sin(\alpha-\phi)\varepsilon^{-k(\beta-\alpha)}$
 又 $\sin(\alpha-\phi) \neq 0$ であるから

$$\frac{\sin(\beta-\phi)}{\sin(\alpha-\phi)} = \varepsilon^{-k(\beta-\alpha)} \quad (2)$$

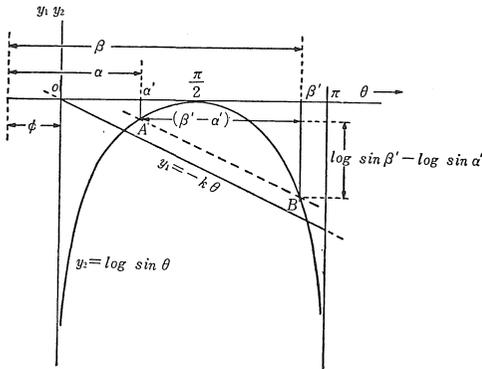
$\sin(\beta-\phi)$, $\sin(\alpha-\phi)$ は共に正であるから(2)の両辺の対数をとると

$$\log \sin(\beta-\phi) - \log \sin(\alpha-\phi) = -k(\beta-\alpha)$$

$\alpha = \alpha' + \phi$, $\beta = \beta' + \phi$ } とおけば $\beta - \alpha = \beta' - \alpha'$
 即ち $\alpha' = \alpha - \phi$, $\beta' = \beta - \phi$ }

$$\therefore \log \sin \beta' - \log \sin \alpha' = -k(\beta' - \alpha')$$

第2図より明らかなように, $0 < \alpha' = \alpha - \phi < \pi$, $\alpha' < \beta' = \beta - \phi < \pi$ であるから, 上式の関係を $y_1 = -k\theta$, [k 一定] $y_2 = \log \sin \theta$ [$0 < \theta < \pi$] により図示すると第3図のようになる。



第3図 消弧角を求める図表 ($\alpha > \phi$)

図より任意の α' に対する β' を求める事が出来る。即ち回路定数 R, L 及び電源の角周波数 ω より $k = \frac{R}{\omega L}$ を計算して, 直線 $y_1 = -\frac{R}{\omega L}\theta$ を引く。又 $\phi = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$, 任意の点弧角 α より $\alpha' = \alpha - \phi$ を求めて θ を α' にとりそこより垂線を下して y_2 曲線との交点を $A(\alpha', \log \sin \alpha')$ とする。更に A より直線 y_1 に対する平行線を引いて y_2 との交点 B を求めると B の横座標が β' である。

$$\text{消弧角 } \beta = \beta' + \phi$$

[第3図に対する考察]

① 点弧角, 消弧角の範囲

$\phi < \alpha < \pi$ 又, $\beta < \pi + \phi$ であるから

$$0 < \alpha' < \pi - \phi, \beta' < \pi$$

又 α' を増加して直線 AB が y_2 曲線に接するとき, α' は最大値 $(\pi - \phi)$ をとる。

$$\left(\begin{array}{l} \frac{dy_2}{d\theta} = \cot\theta, \frac{dy_1}{d\theta} = -\cot\theta \\ \therefore \frac{dy_2}{d\theta} = \frac{dy_1}{d\theta} \text{ のとき } \cot\theta = -\cot\theta \therefore \theta = \pi - \phi \end{array} \right)$$

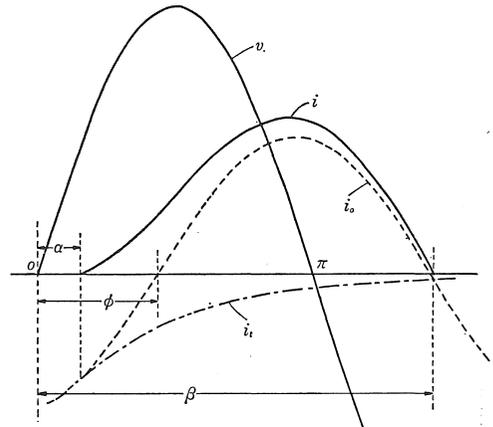
故に α' , β' の範囲は $0 < \alpha' < \pi - \phi$, $\pi - \phi < \beta' < \pi$ 即ち α , β の範囲は $\phi < \alpha < \pi$, $\pi < \beta < \pi + \phi$ となる。

② $\frac{R}{\omega L}$ に対する消弧角の変化

点弧角 α が一定の場合 $k = \frac{R}{\omega L} = \cot\phi$ の大ききにより β' が変るが, 第3図より明らかなように k の増加と共に β' は π に近づき [β は $(\pi + \phi)$ に近づく] 純抵抗回路に近似してくる。逆に k が減少するに従って β' は $(\pi - \alpha')$ に近づく [β は $(\pi - \alpha)$ に近づく]。 $k=0$ 即ち純誘導回路 ($R=0$) では AB は横軸に平行で, $\beta' = \pi - \alpha'$ $\beta = \pi + 2\phi - \alpha$

5. $\alpha < \phi$ で点弧する場合

まづ最初の半波についてのみ考える事にする。 $\sin(\alpha - \phi) < 0$ であるから $i_t < 0$ 又 $\alpha \leq \omega t < \phi$ の範囲では i_0 も負であるので電流, 電圧の関係は第4図のようになる。



第4図 電源電圧と電流の関係 ($\alpha < \phi$)

然し 4. $\alpha > \phi$ の場合と同様に(2)式は成立する。この場合は $2\pi > (\beta - \phi) > \pi$ $0 > (\alpha - \phi) > -\pi$ であるから $\sin(\alpha - \phi)$, $\sin(\beta - \phi)$ は共に負になる。

今 $\alpha = \phi - \alpha'$ $\beta = \beta' - \pi + \phi$ } とおけば
 即ち $\alpha' = \phi - \alpha$ $\beta' = \beta - \phi + \pi$ }

$\sin(\alpha - \phi) = \sin(-\alpha') = -\sin(\pi - \alpha')$
 $\sin(\beta - \phi) = \sin(\beta' - \pi) = -\sin\beta'$ } となり

$\sin(\pi - \alpha')$, $\sin\beta'$ は共に正である。

$$\text{従って(2)式は } \frac{-\sin\beta'}{-\sin(\pi - \alpha')} = \varepsilon^{-k(\beta - \alpha)}$$

$$\text{又 } \beta - \alpha = \alpha' + \beta' - \pi = \beta' - (\pi - \alpha')$$

$$\therefore \frac{\sin\beta'}{\sin(\pi - \alpha')} = \varepsilon^{-k\{\beta' - (\pi - \alpha')\}} \quad (3)$$

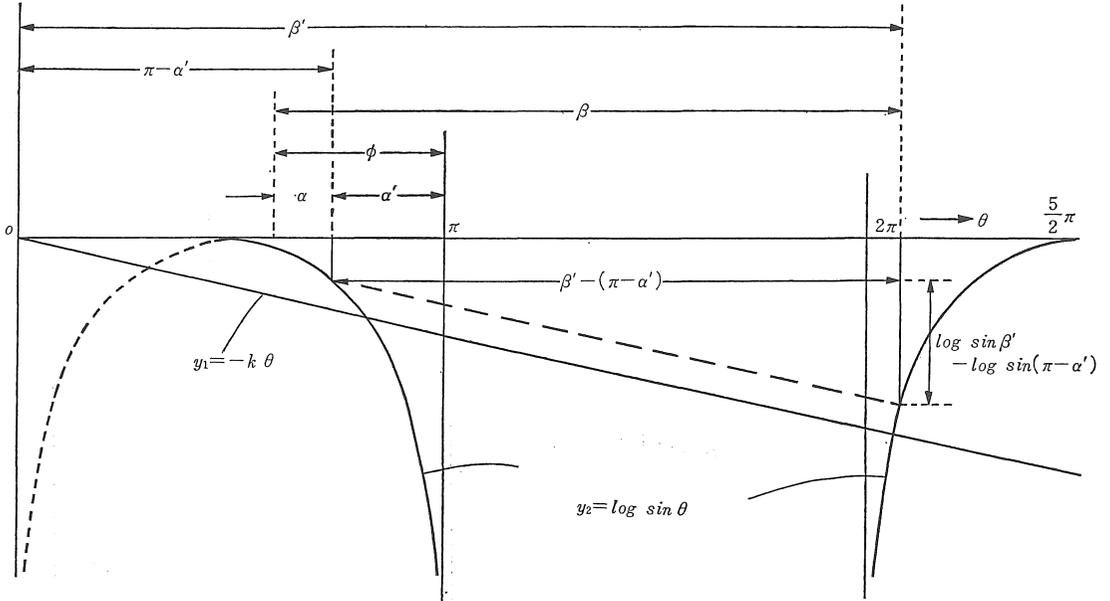
(3)の両辺の対数をとれば

$$\log \sin\beta' - \log \sin(\pi - \alpha') = -k\{\beta' - (\pi - \alpha')\}$$

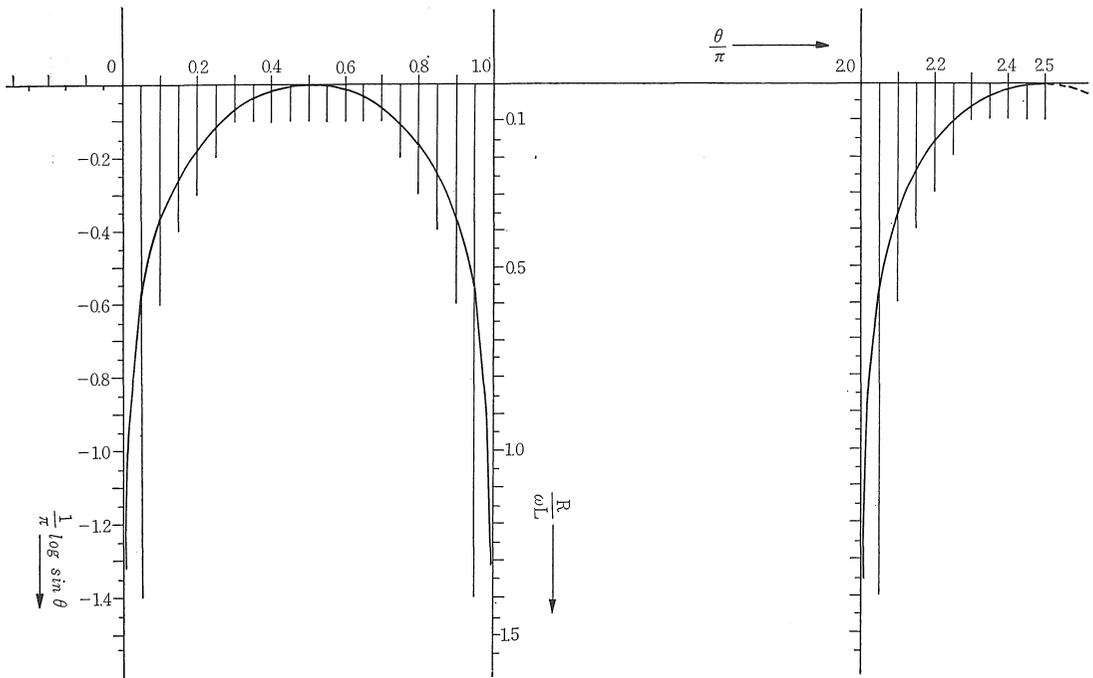
第4図より明らかなように

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} > \phi > \alpha' = \phi - \alpha > 0 & \therefore \frac{\pi}{2} < \pi - \phi < \pi - \alpha' < \pi \\ \pi < \beta - \phi < 2\pi & \therefore 2\pi < \beta' = \beta - \phi + \pi < 3\pi \end{aligned}$$

であるから、上式の関係を図示すると第5図のようになる。



第5図 消弧角を求める図表 ($\alpha < \phi$)



第6図 図 表

4. $\alpha > \phi$ の場合と同様に、点弧角 α より $(\pi - \alpha')$ を計算して、これに対する β' を $2\pi \sim \frac{5}{2}\pi$ の間で図から求めると、消弧角を知る事が出来る。

[第5図に対する考察]

① 点弧角，消弧角の範囲

前述のように $\phi > \alpha' > 0, 0 < \alpha < \phi$
 α を増す [α' を減じて $(\pi - \alpha')$ を増す] に従って β' は減少して 2π に近づき β は $(\pi + \phi)$ に近づく。
 逆に α が減少すれば、 β', β は増加して一定値 ($\alpha = 0$ の場合) に近づく。 β' が最大になるのは、

$$k=0 (R=0), \pi - \alpha' = \frac{\pi}{2} \quad (\phi = \frac{\pi}{2}, \alpha=0)$$

の場合で $\beta' = \frac{5}{2}\pi, \beta = 2\pi$ をとる。

即ち $0 < \alpha < \phi, \pi + \phi < \beta < 2\pi$

② $\frac{R}{\omega L}$ に対する消弧角の変化

一定の点弧角 α に対して、 $k = \frac{R}{\omega L}$ が増して純抵抗回路に近づくとき β' は減少して 2π に近づき、 β は π に近づく。又 α をとり得る範囲もせまくなる。逆に k が減少すると、 β' は増加して $\frac{5}{2}\pi$ に [β は 2π に] 近づく。

以上は最初の半波のみで考えたが、 $\alpha < \phi$ の場合では消弧角 β が $(\pi + \phi)$ より大きいので、電流が流れている時 [$\omega t = \pi \sim (\pi + \phi)$] に次のパルスを与えても無効である。従って単一パルスの場合には、奇数番目のパルスでのみ点弧して i は直流になる。

$(\beta - \pi)$ より大きい位相のパルスが α のあとにくるような連続パルスでは、直流分を含む交流となり、偶数番目の半波中のパルスでは、4. $\alpha > \phi$ の場合と同様の電流が流れる。

第6図に、実際に使用した図表を示す。但し、読取の精度をよくするため横軸を $\frac{\theta}{\pi}$ 、縦軸は $\frac{1}{\pi} \log \sin \theta$ で表わした。

6. 消弧角近似計算の一方法

(a) $y = \log \cos \theta, y = \log \sin \theta$ の近似式

$\theta = \theta_0 + 2n\pi$ [n は整数] において

$y_2 = \log \cos \theta$ が

$$y_2 = -A'(\theta - 2n\pi)^2 + B'(\theta - 2n\pi) \quad (4)$$

で近似出来るものとする。但し $\theta = \theta_0 + 2n\pi$ において、 y_2 は y_3 に接する。

$$(y_2)_{\theta = \theta_0 + 2n\pi} = (y_3)_{\theta = \theta_0 + 2n\pi}$$

$$\left(\frac{dy_2}{d\theta}\right)_{\theta = \theta_0 + 2n\pi} = \left(\frac{dy_3}{d\theta}\right)_{\theta = \theta_0 + 2n\pi}$$

之を解くと

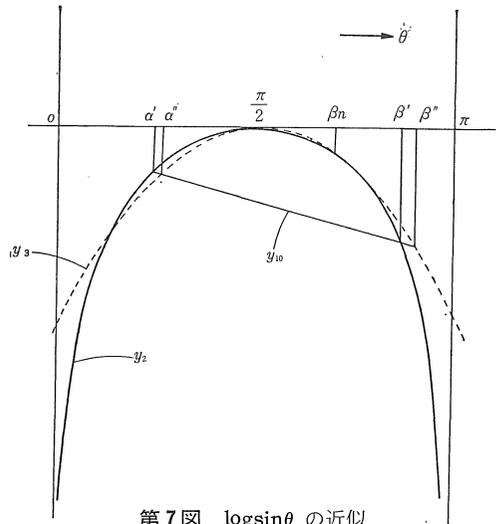
$$\left. \begin{aligned} A' &= \frac{\log \cos \theta_0}{\theta_0^2} + \frac{\tan \theta_0}{\theta_0} \\ B' &= \frac{2 \log \cos \theta_0}{\theta_0} + \tan \theta_0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(4)式(5)式において、 θ_0 の代りに $(\theta_0 - \frac{\pi}{2})$ を代入すれば、 $\cos \theta, \cos \theta_0, \tan \theta_0$ はそれぞれ $\sin \theta, \sin \theta_0, (-\cot \theta_0)$ になるから $y_2 = \log \sin \theta$ は $\theta = \theta_0 + 2n\pi$ において $y_3 = -A(\theta - \frac{4n+1}{2} \cdot \pi)^2 + B(\theta - \frac{4n+1}{2} \cdot \pi)$

—(6) で近似出来る。但し

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\log \sin \theta_0}{(\theta_0 - \frac{\pi}{2})^2} - \frac{\cot \theta_0}{\theta_0 - \frac{\pi}{2}} \\ B &= \frac{2 \log \sin \theta_0}{\theta_0 - \frac{\pi}{2}} - \cot \theta_0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

(b) $\phi < \alpha < \pi$ である場合の β の近似値



第7図 $\log \sin \theta$ の近似

第7図のように、直線 $y_{10} = -k\theta + D$ と y_3 との交点の横座標を $\alpha'', \beta'' (\alpha'' < \beta'')$ とすれば β'' は β' の近似値である。

この場合は(6)式において $n=0$ であるから、 $(\pi - \phi)$ と π の間で適当な $\beta_n [\beta_n \approx \beta']$ をとり $\theta = \beta_n$ で y_2 が y_3 に接するとすれば

$$y_3 = -A_1 \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)^2 + B_1 \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$A_1 = \frac{\log \sin \beta_n}{\left(\beta_n - \frac{\pi}{2}\right)^2} - \frac{\cot \beta_n}{\beta_n - \frac{\pi}{2}}$$

$$B_1 = \frac{2 \log \sin \beta_n}{\beta_n - \frac{\pi}{2}} - \cot \beta_n$$

$y_{10} = -C\theta + D_1$ とおけば

$$C = \cot \phi \quad D_1 = \log \sin \alpha' + \alpha' \cot \phi$$

α'', β'' は $y_3 = y_{10}$ の根であるから

$$-A_1\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)^2 + B_1\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -C\theta + D_1 \text{ を解いて}$$

$$\theta - \frac{\pi}{2} = \frac{B_1 + C}{2A_1} \mp \frac{\sqrt{(B_1 + C)^2 - 4A_1\left(D_1 - \frac{\pi}{2}C\right)}}{2A_1}$$

$A_1 > 0$ であるから第2項は正、又 $\alpha'' < \beta''$

$$\therefore \beta'' = \frac{B_1 + C + \sqrt{(B_1 + C)^2 - 4A_1\left(D_1 - \frac{\pi}{2}C\right)}}{2A_1} + \frac{\pi}{2} \text{---(8)}$$

消弧角 $\beta = \beta'' + \phi$

$\pi - \phi < \beta_n < \pi$ となる範囲で(8)式を計算すれば β の近似値が求められる。

(c) $0 < \alpha < \phi$ である場合の β の近似値

第5図, 第7図より $y_{10} = -C\theta + D_2$

$$C = \cot\phi, \quad D_2 = \log\sin\alpha' + (\pi - \alpha')\cot\phi$$

この場合は, (6)式において $n=1$ となるから

$$y_3 = -A_2\left(\theta - \frac{5}{2}\pi\right)^2 + B_2\left(\theta - \frac{5}{2}\pi\right)$$

$$\text{又 } \beta_n = \theta_0 + 2\pi \quad \therefore \theta_0 - \frac{\pi}{2} = \beta_n - \frac{5}{2}\pi$$

であるから, (7)式より

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= \frac{\log \sin\beta_n}{\left(\beta_n - \frac{5}{2}\pi\right)^2} - \frac{\cot\beta_n}{\beta_n - \frac{5}{2}\pi} \\ B_2 &= \frac{2\log\sin\beta_n - \cot\beta_n}{\beta_n - \frac{5}{2}\pi} \end{aligned} \right\}$$

第5図より明らかなように, β'' は $y_3 = y_{10}$ の根のうち小さい方をとればよいから

$$\beta'' = \frac{B_2 + C - \sqrt{(B_2 + C)^2 - 4A_2\left(D_2 - \frac{5}{2}\pi C\right)}}{2A_2} + \frac{5}{2}\pi \text{---(9)}$$

消弧角 $\beta = \beta'' - \pi + \phi$

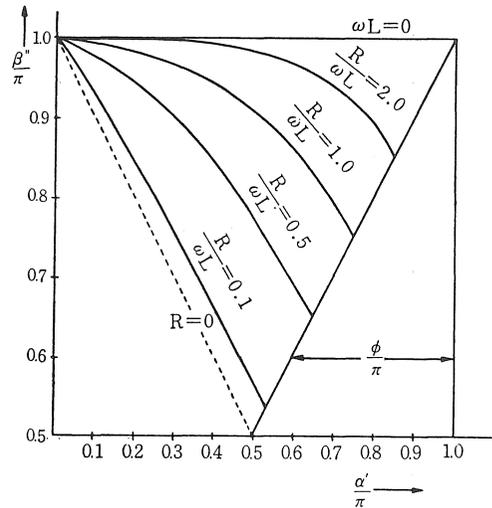
$2\pi < \beta_n < \frac{5}{2}\pi$ となる範囲で(9)式を計算すればよい。

第1表は β_n に対する A_1, B_1 ($\alpha > \phi$) $A_2, -B_2$ ($\alpha < \phi$) の一例である。

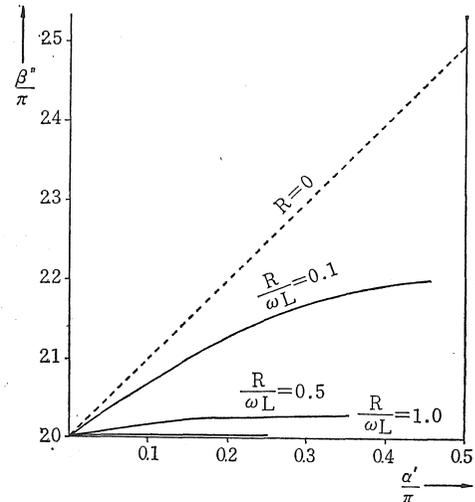
第1表 β_n に対する定数 $A_1, B_1, A_2, -B_2$

β_n	2.48π 0.52π	2.46π 0.54π	2.44π 0.56π	2.42π 0.58π	2.40π 0.60π
A_1, A_2	0.501067	0.503867	0.509013	0.516211	0.525803
$B_1, -B_2$	0.000049	0.000311	0.001133	0.002721	0.005452
β_n	2.38π 0.62π	2.36π 0.64π	2.34π 0.66π	2.32π 0.68π	2.30π 0.70π
A_1, A_2	0.537020	0.552887	0.571111	0.593088	0.619488
$B_1, -B_2$	0.009313	0.015782	0.024389	0.036149	0.051931

β_n	2.28π 0.72π	2.26π 0.74π	2.24π 0.76π	2.22π 0.78π	2.20π 0.80π
A_1, A_2	0.651202	0.689388	0.735659	0.792203	0.862168
$B_1, -B_2$	0.072883	0.100513	0.136902	0.184924	0.248728
β_n	2.18π 0.82π	2.16π 0.84π	2.14π 0.86π	2.12π 0.88π	2.10π 0.90π
A_1, A_2	0.940022	1.062837	1.211559	1.414479	1.705472
$B_1, -B_2$	0.324365	0.451531	0.615196	0.851511	1.208634
β_n	2.08π 0.92π	2.06π 0.94π	2.04π 0.96π	2.02π 0.98π	2.001π 0.999π
A_1, A_2	2.152469	2.915948	4.483137	9.323151	197.0183
$B_1, -B_2$	1.785489	2.819253	5.041645	12.22344	305.1924



第8図 α' と β'' の関係 ($\alpha > \phi$)



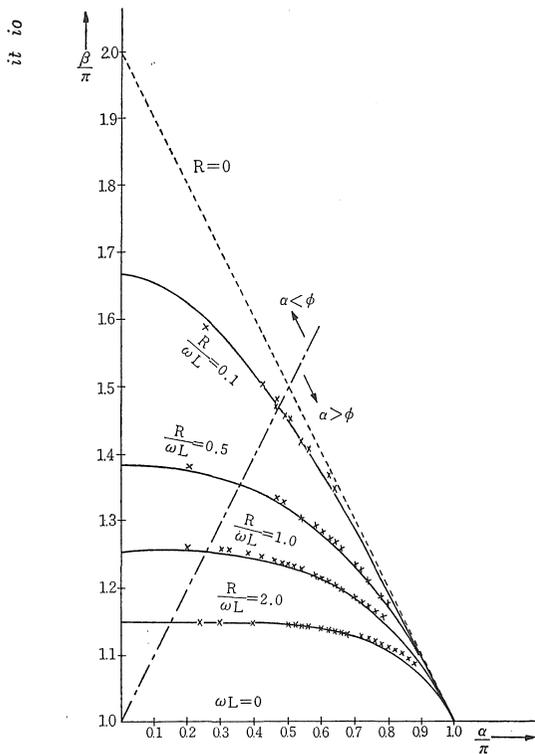
第9図 α' と β'' の関係 ($\alpha < \phi$)

7. 計算結果ならびに実測値との比較

第6図及び(8)式, (9)式を用いて β'' を計算した結果を第8図, 第9図に示す。

即ち, 第8図は $\alpha > \phi$ であるときの $\alpha' = \alpha - \phi$ に対する β'' [$\beta' = \beta - \phi$ の近似値] の変化を示す。同様に第9図は $\alpha < \phi$ である場合の $\alpha' = \phi - \alpha$ に対する β'' [$\beta' = \beta + \pi - \phi$ の近似値] の変化を示している。

第10図は点弧角と消弧角との関係を, $\frac{R}{\omega L}$ が 0.1, 0.5, 1.0, 2.0 である場合について表わしたもので実線は計算結果, \times 印は実測結果を示す。



第10図 α と β の関係

8. む す び

この報告はサイリスタによる調光回路の検討中に必要を生じて行った研究の一部であるが, 点弧角と消弧角の関係を知る事は電算機を利用すれば至難ではない。しかし, サイリスタの応用上ではむしろ上述の方法をとる方が便利であると思われる。ここではRL回路の点弧角と消弧角の関係についてのみ述べたが, 電流の瞬時値, 実効値, 等も求める事が出来る。又RL以外の回路についても現在解析中であるので次の機会に述べたい。

終りに, 電子計算機による計算に御協力願った一柳勝宏氏に御礼申上げる。

〔文 献〕

- 北野, 清水1967新電元ニュース Vol 6 P11~14
- 竹内, 1965電気学会雑誌 Vol 85-6 P138~146
- 加納1967愛工大研究報告 Vol 3 P11~16
- SHEPHERD, W 1965 IEEE Intern Conv Record Vol 13-8 P 183~193