

直線近似による数値積分公式とその誤差評価

Numerical Integration Formulae Approximated by Straight Lines and their Error Estimations

太田 佳穂里[†]

樋口 功[‡]

Kaori OHTA

Isao HIGUCHI

Abstract. In the classical integration formulae such as the mensuration by parts, the trapezoid rule and the midpoint rule, the curve $y=f(x)$ is approximated by the straight lines and hence the calculations are relatively simple.

The main purpose of this study is to introduce several new integration formulae approximated by various straight lines passing the points on the curve $y=f(x)$.

At the same time, we shall give the error estimations concerning the new integration formulae.

1. はじめに

原始関数が容易には求められない関数の定積分の近似公式として、区分求積法、中点法および台形法などが昔から知られているが、近年、パソコンの普及によりこれらの公式の有効性が見直されている。

以上の三つの積分公式はいずれも被積分関数を一次式で近似して導かれたものであり、2次関数で近似して得られる、より誤差の少ないシンプソン法へと、発展していった。

一方、筆者の一人は、[10]において、積分の平均値の定理を一般化する作業の中で、任意の連続関数 $f(x)$ の定積分が、曲線 $y=f(x)$ 上の点を通る直線を表す一次式の定積分と一致することを証明した。しかし [10] で得られた理論は、具体的な近似計算には、残念ながら使えない。

以上の二つの事実をもとに、筆者らは情報通信工学科・卒業研究において、計算が比較的楽である直線近似による新しい積分公式を導くことを試みた。

その結果、積分区間の両端点や中点における関数値あるいは区間の長さにこだわらない、いくつかの新しい近似積分公式を作り出すことが出来た。合わせて、得られた新公式をその精度の高さに従って序列化することが出来た。

言い換えると、より誤差の少ない積分公式を順次作り出す過程で、新公式が導かれる必然性を明らかにしつつ、同じ直線近似の一連の新積分公式を精度順に体系化することが出来た。

新近似積分公式の具体的な形とその誤差の評価式を、以下にまとめて報告する。

[†] 情報通信工学科・4年生

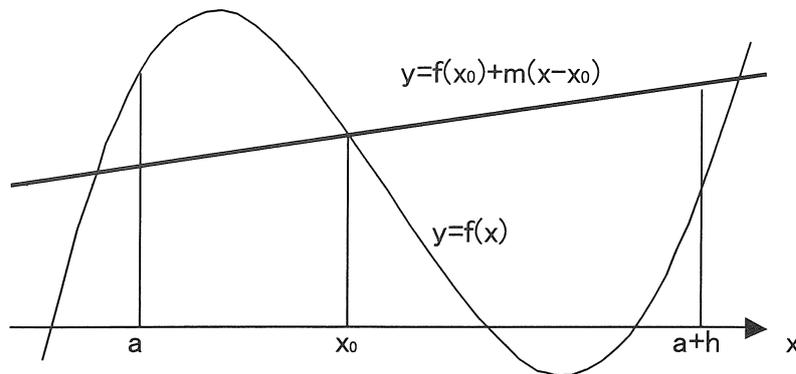
[‡] 基礎教育センター・自然科学教室

2. 傾き m の直線による近似積分公式

関数 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ 上で連続であるとする。任意の定数 m および任意の $x_0 \in [a, b]$ に対し, 曲線 $y = f(x)$ を, 点 $(x_0, f(x_0))$ を通り傾き m の直線 $y = f(x_0) + m(x - x_0)$ で近似して得られる近似積分公式を

$$\tilde{I}(f) = \tilde{I}(x_0; m)(f) = \int_a^{a+h} \{f(x_0) + m(x - x_0)\} dx$$

とする。



積分公式 $\tilde{I}(f) = \tilde{I}(x_0; m)(f)$ の具体的な形およびその誤差は, 次の定理ように表される。

定理 1.

区間 $[a, b] = [a, a+h]$ 上で連続な任意の関数 $f(x)$ に対し,

$$\tilde{I}(f) = \tilde{I}(x_0; m)(f) = \{f(x_0) + m(a - x_0)\}h + \frac{1}{2}mh^2$$

が成り立つ。

またその誤差を $E_{\tilde{I}}(f) = \tilde{I}(f) - I(f)$ とおくと, 任意の $f(x) \in C^1$ に対し

$$E_{\tilde{I}}(f) = O(h^2)$$

となる。ここで, x_0 および m に無関係で, $f(x)$ にのみ依存する定数 $C \geq 0$ が存在し,

$|E_{\tilde{I}}(f)| \leq Ch^2$ が成り立つとき $E_{\tilde{I}}(f) = O(h^2)$ と記述する。

証明.

$$\begin{aligned}\tilde{I}(f) &= \int_a^{a+h} \{f(x_0) + mx - mx_0\} dx \\ &= f(x_0)[x]_a^{a+h} + m\left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^{a+h} - mx_0[x]_a^{a+h} \\ &= h\{f(x_0) - mx_0\} + \frac{1}{2}m(2ah + h^2)\end{aligned}$$

一方, $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ とすると,

$$I(f) = F(a+h) - F(a)$$

で, これを必要なだけテーラー展開すると,

$$I(f) = f(a)h + \frac{1}{2!}f'(a)h^2 + \frac{1}{3!}f''(a)h^3 + \frac{1}{4!}f'''(a)h^4 + \dots$$

誤差を $E_{\tilde{I}}(f)$ とすると,

$$\begin{aligned}E_{\tilde{I}}(f) &= \tilde{I}(f) - I(f) \\ &= [h\{f(x_0) - mx_0 + ma\} + \frac{1}{2}mh^2] \\ &\quad - \{f(a)h + \frac{1}{2!}f'(a)h^2 + \frac{1}{3!}f''(a)h^3 + \frac{1}{4!}f'''(a)h^4 + \dots\} \\ &= h\{f(x_0) - f(a) - m(x_0 - a)\} + \frac{1}{2}h^2\{m - f'(a)\} \\ &\quad - \frac{1}{3!}f''(a)h^3 - \frac{1}{4!}f'''(a)h^4 - \dots\end{aligned}$$

ここで更に $f(x_0) - f(a)$ をテーラー展開すると

$$f(x_0) - f(a) = f'(a)(x_0 - a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x_0 - a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x_0 - a)^3 + \dots$$

また, $x_0 = a + th$ ($0 \leq t \leq 1$) と置くと, $x_0 - a = th$ だから

$$f(x_0) - f(a) = f'(a)th + \frac{1}{2!}f''(a)(th)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(th)^3 + \dots$$

これを $E_{\tilde{I}}(f)$ に代入すると,

$$\begin{aligned}
E_{\tilde{I}}(f) &= h\{-mth + f'(a)th + \frac{1}{2!}f''(a)(th)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(th)^3 + \dots\} \\
&\quad + \frac{1}{2}h^2\{m - f'(a)\} - \frac{1}{3!}f''(a)h^3 - \frac{1}{4!}f'''(a)h^4 - \dots \\
&= \{m - f'(a)\}\left(\frac{1}{2} - t\right)h^2 + \left(\frac{1}{2!}t^2 - \frac{1}{3!}\right)f''(a)h^3 + \dots
\end{aligned}$$

従って, 任意の $x_0 = a + th$, 任意の m および一般の $f(x) \in C^1$ に対しては, h^2 の項が残るので, $E_{\tilde{I}}(f) = O(h^2)$ が成り立ち, 定理が証明された。

3. 中点法の一般化

この章では, 前章で導いた近似積分公式

$$\tilde{I}(f) = \tilde{I}(x_0; m)(f) = \{f(x_0) + m(a - x_0)\}h + \frac{1}{2}mh^2$$

に関し, 任意の傾き m が与えられたとき, $\tilde{I}(f) = \tilde{I}(x_0; m)(f)$ の誤差を最も少なくする x_0 の値を具体的に決めたい。

古典的な中点法の一般化として, 次の結果が得られた。

定理 2 .

任意の関数 $f(x) \in C^2$, 任意の傾き m および任意の十分小さな h に対し,

$x_0 = a + \frac{1}{2}h$ のとき近似積分公式 $\tilde{I}(f) = \tilde{I}(x_0; m)(f)$ の精度は最高となる。このとき,

$$\tilde{I}\left(a + \frac{1}{2}h; m\right)(f) = f\left(a + \frac{1}{2}h\right)h$$

$$E_{\tilde{I}}(f) = O(h^3)$$

が成り立つ。

証明.

$x_0 = a + th$ とおくと, 定理 2 の証明で確認したように

$$E_{\tilde{I}}(f) = \{m - f'(a)\}\left(\frac{1}{2} - t\right)h^2 + \left(\frac{1}{2!}t^2 - \frac{1}{3!}\right)f''(a)h^3 + \left(\frac{1}{3!}t^3 - \frac{1}{4!}\right)f'''(a)h^4 + \dots$$

よって任意の $f(x), m$ に対し h^2 の項を消去するためには, $\frac{1}{2} - t = 0$ すなわち $t = \frac{1}{2}$

であればよい。このとき h^3 の項は 0 とはならないので, $E_{\bar{I}}(f) = O(h^3)$

注意 .

定理 3 で得られた $\tilde{I}(a + \frac{1}{2}h; m)(f)$ で $m = 0$ を代入した $\tilde{I}(a + \frac{1}{2}h; 0)(f)$ は古典的な中点法と一致する。従って定理 3 は中点法の一般化といえる。

4. 傾き $f'(a)$ の直線による近似積分公式

本章では, 定理 1 で得られた積分公式

$$\tilde{I}(x_0; m)(f) = \{f(x_0) + m(a - x_0)\}h + \frac{1}{2}mh^2$$

に関し, 任意の $f(x) \in C^2$, 任意の $x_0 = a + th$ が与えられたとき, その誤差を最小にする傾き m の値を決定する。

次の定理が得られた。

定理 3 .

任意の $f(x) \in C^2$, 任意の十分小さな h および任意の $x_0 = a + th \in [a, a + h]$

に対し, $m = f'(a)$ のときに $\tilde{I}(x_0; m)(f)$ の精度は最高となる。このとき

$$\tilde{I}(x_0; f'(a))(f) = \{f(x_0) + f'(a)(a - x_0)\}h + \frac{1}{2}f'(a)h^2$$

$$E_{\tilde{I}}(f) = O(h^3)$$

が成り立つ。

証明.

定理 1 の証明で見たように

$$E_{\tilde{I}}(f) = \{m - f'(a)\}(\frac{1}{2} - t)h^2 + (\frac{1}{2!}t^2 - \frac{1}{3!})f''(a)h^3 + \dots$$

よって任意の $f(x), t(0 \leq t \leq 1)$ に対し h^2 の項を消去するには

$m - f'(a) = 0$ すなわち $m = f'(a)$ とすればよい。このとき誤差は

$$E_T(f) = \left(\frac{1}{2!}t^2 - \frac{1}{3!}\right)f''(a)h^3 + \dots = O(h^3)$$

となる。一般の $t \in [a, a+h]$ に対しては, h^3 の項が残るからである。

5. 最良の近似公式

前章では, 与えられた任意の x_0 に対し, 点 $(x_0, f(x_0))$ を通り, 傾きが $f'(a)$ の直線で近似したとき, 誤差が最小になることが分かった。

引き続き本章では, 前章で得られた近似積分公式

$$\tilde{I}(x_0; f'(a))(f) = \{f(x_0) + f'(a)(a - x_0)\}h + \frac{1}{2}f'(a)h^2$$

の誤差を最小にする点 $x_0 = a + th$ の値を具体的に決めたい。

積分公式 $\tilde{I}(x_0; f'(a))(f)$ の誤差の評価式では, h および h^2 の項は消去された。

そこで, 誤差を更に小さくするため, 最初に登場する h^3 の係数を 0 とする $t \in [0, 1]$ の値を求める作業から始め, 次の結果を得た。

定理 4 .

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(x_0, f(x_0))$ ($x_0 \in [a, a+h]$) を通り, 傾き m の直線で近似して得られる積分公式 $\tilde{I}(x_0; m)(f)$ は, 十分小さな h および任意の $f(x) \in C^3([a, a+h])$ に対し,

$$x_0 = a + \sqrt{\frac{1}{3}}h$$

$$m = f'(a)$$

のとき精度が最高となる。

このとき

$$\tilde{I}\left(a + \sqrt{\frac{1}{3}}h; f'(a)\right)(f) = f\left(a + \sqrt{\frac{1}{3}}h\right)h + \frac{3 - 2\sqrt{3}}{6}f'(a)h^2$$

$$E_{\tilde{I}}(f) = O(h^4)$$

が成り立つ。

証明.

定理 3 の証明で得た等式

$$\begin{aligned} E_i(f) &= \{f(x_0) + f'(a - x_0)\}h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 \\ &= \left(\frac{1}{2!}t^2 - \frac{1}{3!}\right)f''(a)h^3 + \left(\frac{1}{3!}t^3 - \frac{1}{4!}\right)f'''(a)h^4 \end{aligned}$$

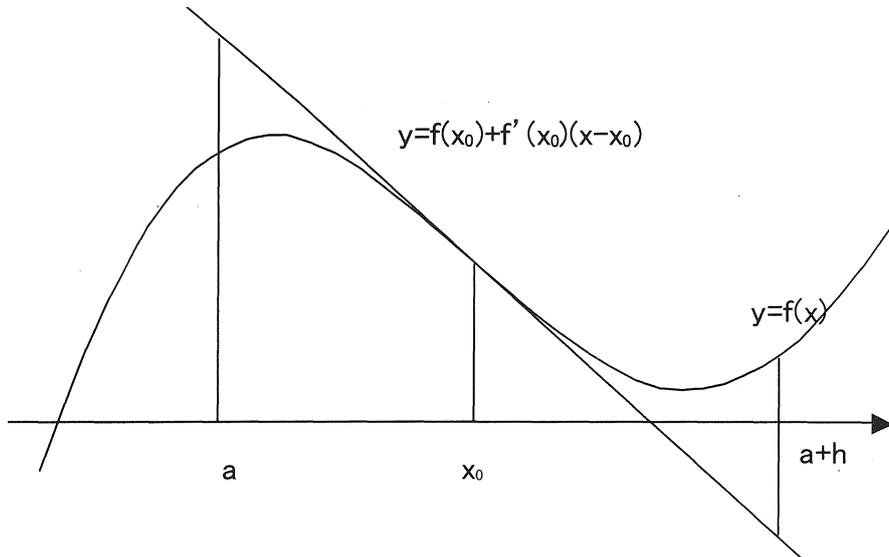
より h^3 の項を消すためには, $\frac{1}{2!}t^2 - \frac{1}{3!} = 0$ すなわち $3t^2 - 1 = 0$ で, $t = \sqrt{\frac{1}{3}}$ と

すればよい. このとき h^4 の係数は 0 とはならない.

従って最良の公式は $x_0 = a + \sqrt{\frac{1}{3}}h$, $m = f'(a)$ のときで, 誤差は $O(h^4)$ となる.

6. 接線近似による積分公式

次に考えられる近似としては, 接線による近似である.



任意の点 $x_0 \in [a, a+h]$ に対し, 点 $(x_0, f(x_0))$ を通る接線で $y = f(x)$ を近似して得られる近似積分公式を

$$I'(f) = I'(x_0; f'(x_0))(f)$$

で表す.

接線は, $x_0 = a + th(0 \leq t \leq 1)$ とすると

$$y = f(a + th) + f'(a + th)(x - a - th)$$

となり, $I'(f)$ を $x_0, f'(x_0), f(x_0)$ を用いて具体的に表すと次の定理が得られる。

定理 5.

$$\begin{aligned} I'(f) &= I'(x_0; f'(x_0))(f) \\ &= f(x_0)h + \frac{1}{2} f'(x_0) \{2(a - x_0)h + h^2\} \\ &= f(a + th)h + \frac{1}{2} f'(a + th)(-2t + 1)h^2 \end{aligned}$$

で, 誤差 $E_I(f) = I'(f) - I(f)$ は

$$E_I(f) = O(h^3)$$

と評価される。

証明 .

$$\begin{aligned} I'(f) &= \int_a^{a+h} \{f(a + th) + f'(a + th)(x - a - th)\} dx \\ &= f(a + th)[x]_a^{a+h} + f'(a + th) \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_a^{a+h} - f'(a + th)(a + th)[x]_a^{a+h} \\ &= h \{f(a + th) - f'(a + th)(a + th)\} + \frac{1}{2} f'(a + th)(2ah + h^2) \end{aligned}$$

ここでテーラー展開を用いると,

$$\begin{aligned} &= h \left[f(a) + f'(a)th + \frac{1}{2!} f''(a)(th)^2 + \frac{1}{3!} f'''(a)(th)^3 + \dots \right. \\ &\quad \left. - (a + th) \left\{ f'(a) + f''(a)th + \frac{1}{2!} f'''(a)(th)^2 + \frac{1}{3!} f^{(4)}(a)(th)^3 + \dots \right\} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} (2ah + h^2) \left\{ f'(a) + f''(a)th + \frac{1}{2!} f'''(a)(th)^2 + \frac{1}{3!} f^{(4)}(a)(th)^3 + \dots \right\} \\ &= hf(a) + h^2 * \frac{1}{2} f'(a) + h^3 \left\{ \frac{1}{2} f''(a)t(1-t) \right\} + \dots \end{aligned}$$

一方, $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とすると, テーラーの定理より

$$\begin{aligned} I(f) &= F(a+h) - F(a) \\ &= f(a)h + \frac{1}{2!} f'(a)h^2 + \frac{1}{3!} f''(a)h^3 + \frac{1}{4!} f'''(a)h^4 + \dots \end{aligned}$$

従って誤差 $E_{I'}(f)$ は

$$\begin{aligned} E_{I'}(f) &= I'(f) - I(f) \\ &= [f(a)h + \frac{1}{2} f'(a)h^2 + \{\frac{1}{2} f''(a)t(1-t)\}h^3] + \dots \\ &= f''(a)h^3 \left\{ \frac{1}{2} t(1-t) - \frac{1}{3!} \right\} + \dots \end{aligned}$$

となる。

ここで h^3 の項を消すため

$$\frac{1}{2} t(1-t) - \frac{1}{3!} = 0$$

とすれば, 更に誤差を小さくすることができる。分母を払い

$$3t^2 - 3t + 1 = 0$$

すなわち

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9-12}}{3 \cdot 2}$$

とすればよい。この場合 t は虚数となり $0 \leq t \leq 1$ に反する。

以上より, $x_0 = a + th$ をどのように選んでも, h^3 の項を消去することはできない。

従って誤差は

$$E_{I'}(f) = O(h^3)$$

となる。

注意 .

接線近似による積分公式の限界が定理 5 により示されたことになる。

傾きが定数 m ではなく, x_0 の関数 $m(x_0)$ である場合に拡張し, より精度を高める議論が

次に必要であるが, 上の定理は, 自然に考えられるその特別な場合で, $m(x_0) = f'(x_0)$ と置いて

得られた結果である。一般の場合については, 次の機会に報告したい。

参考文献

- [1] 稲沢久也, 樋口功, 被積分関数の滑らかさによる数値積分公式の誤差の評価について, 愛知工業大学研究報告, 33 号 A, 7-17, 1998.
- [2] 篠崎壽夫, 松下裕輔, 応用数学計算法入門(上), (下), コロナ社, 1971.
- [3] 清水麻希子, 富永真琴, 樋口功, 誤差の評価から逆算した閉型積分近似公式について, 愛知工業大学研究報告, 34 号 A, 5-16, 1999.
- [4] 杉浦洋, 入門数値計算, サイエンス社, 1997.
- [5] 高田勝, 機械計算法, 養賢堂, 1994.
- [6] 秦野和郎, 複合積分則の剰余項について, 数値解析とそのアルゴリズム予稿集, 於京都大学数理解析研究所, 1991.
- [7] 樋口功, シンプソン公式と同等の精度を持つ新台形公式について, 愛知工業大学研究報告, 34 号 A, 17-26, 1999.
- [8] 山本哲郎, 数値解析入門, サイエンス社, 1995.
- [9] I.Higuchi, Recurtion formulas of numerical integration based on the values at random abscissas, ポテンシャル論研究集会講演集, 於愛知工業大学, 52-59, 2000.
- [10] I.higuchi, On the convergence of approximation solutions of non-linear equation $f(x)=0$ for $f(x)$ in C^1 -class.
- [11] F.B.Hildebrand, Introduction to numerical analysis, MacGraw-Hill, 1974.
- [12] R.Kress, Numerical analysis, Springer-Verlag, 1998.
- [13] A.Ralston and P.Rabinowitz, A first course in numerical analysis, MacGraw-Hill, 1986.
- [14] J.Stoer and R.Bulirsch, Introduction to numerical analysis, Springer-Verlag, 1996.

(受理 平成14年 3 月19日)