最小時間制御における最適量子化制御信号について

小 林 英 夫

Optimum Quantization of Control Signals in Minimum-Time Control Processes

Hideo KOBAYASHI

This paper is concerned with the problem of the optimum quantization of control signals in the minimum-time control of the multistage deterministic and discrete processes.

For the purpose of minimizing the controlling time needful to bring the values of the state variables of the plant to within the allowable error of the given reference value, being given that the initial state variables of the plant are distributed with the gaussian probability density founction and the reference value of the system takes different values, we obtained the results of computation using the method of dynamic programming from the foundation of the definition of optimum quantization.

Some figures are presented which compare the curves of the minimum-time and the timeresponse in case of using the optimum quantized signal with those of the other case and visualize the effect of the optimum quantization for minimizing the expected value of the controlling time.

1. ま え が き

自動制御における最適制御の問題は，一組の微分方程式によって記述された系の動特性及び系の最適動作をきめる基準となる評価関数が与えられるとき，この評価関数を最大又は最小にするところの制御変数を決定することにあり，これが多段制御過程において最適な時系列として選定されるならば，この制御変数の系列を最適政策とみなすことができる[1].

ここでとり扱う問題はプラントの多段制御決定過程の最適制御のうち，Terminal Control Modeの一つとして，系の制御対象に制御変数を時間の経過と共に離散的に与えることによって出力の状態変数を目標値の許容誤差以内に収束させようとする場合，このために必要な制御段階数Nを最小にすることをもって最適とする考えの上にたって，制御初期段階における系の状態変数の分布確率空間に関する段階数Nの期待値を最小にしようとするものである．サンプリングの時間を一定とすればこのような最小時間制御はMinimum-N Control と呼ぶことができる．以下の最適政策の決定に関連する各種の計算は本学のディジタル型電子計算機 NEAC2203 を使用し，ダイナミックプログラミング[2][3][4]の計算手法に従って行った．

2. プラントの動特性と評価関数[5][6]

プラントの動特性は次の一組の微分方程式によって与えられる．

$$\dot{x}_i(t)=f_i[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t);m_1(t),m_2(t)\cdots,m_r(t);\; n_1(t),n_2(t),\cdots,n_s(t);t] \quad i=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

これはまた

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{m}(t),\boldsymbol{n}(t),t]$$

であらわすならば，$\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{m}(t)$ および $\boldsymbol{n}(t)$ はそれぞれプラントの状態ベクトル，制御ベクトル，および外乱ベクトルである．

線型な系ならば (1) 式は

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{m}(t)+\boldsymbol{n}(t) \tag{2}$$

ここで $\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{D}(t)$ はそれぞれ $n_x\times n_x$ の係数マトリクス，$n_x\times n_m$ の駆動マトリクスである．

計算機制御を行う場合サンプリング週期をTとすると，次の状態遷移方程式をうる．

$$\boldsymbol{x}(\overline{k+1}T)=\boldsymbol{\phi}(kT)\boldsymbol{x}(kT)+\boldsymbol{G}(kT)\boldsymbol{m}(kT)+\boldsymbol{u}(kT) \tag{3}$$

終値制御のための評価関数として

$$I_N=[\boldsymbol{x}(NT)-\boldsymbol{r}(NT)]'\boldsymbol{Q}(NT)[\boldsymbol{x}(NT)-\boldsymbol{r}(NT)] \tag{4}$$

を用いることにする.

ここに　$\phi(kT)$：状態遷移マトリクス

$G(kT)$：プロセスの状態に及ぼす制御信号の効果をあらわすマトリクス

$u(kT)$：外乱ベクトル

$r(NT)$：目標値ベクトル

$Q(NT)$：正定値対称マトリクス

である.

評価関数I_Nの最小期待値は段階数Nと初期状態ベクトルに関係するので，$f_N[x(0)]$であらわすと

$$f_N[x(0)]=\underset{\{m(kT)\}}{Min}ExpI_N \qquad k=1,2,\cdots,N \tag{5}$$

3. 関数方程式と *Minimum-N*

簡単のため系は一次の Time-invariant で Markovian であるとすると，最適原理を用いて繰り返しの関数関係を求めることができる．外乱がない場合(3)式は

$$x(\overline{k+1}T)=\phi(T)x(kT)+g(T)m(kT) \tag{6}$$

であるので，この式より

$$x(kT)=\phi(kT)x(o)+\sum_{j=0}^{k-1}\phi(\overline{k-1}T-jT)G(T)m(jT) \tag{7}$$

がえられる.

ここで　$y(kT)=\phi(kT)G(T)$

$v(kT)=\phi(kT)x(0)$　とおき

$Q(NT)=1$ とすれば (7)式と (4) 式はそれぞれ

$$x(kT)=v(kT)+\sum_{j=0}^{k-1}y(\overline{k-1}T-jT)m(jT) \tag{8}$$

$$I_N=F[x(NT)-r(NT)]=[x(NT)-r(NT)]^2 \tag{9}$$

であらわされる.

この変分問題に対してつぎの式をうる.

$$f_N(v)=\underset{\{m\}}{Min}F[v(NT)+\sum_{j=0}^{N-1}y(\overline{N-1}T-jT)m(jT)-r(NT)] \tag{10}$$

さらに Σ の中から第一項を分離して変数をかえると，

$$f_N(v)=\underset{\{m\}}{Min}F[v(NT)+y(\overline{N-1}T)m(0)+\sum_{j=0}^{N-2}y(\overline{N-2}T-jT)m(\overline{j+1}T)-r(NT)] \tag{11}$$

最適原理より次のくりかえしの関係をうる.

$$f_N(v)=\underset{m(0)}{Min}f_{N-1}[v(NT)+y(\overline{N-1}T)m(0)] \tag{12}$$

計算の出発点は

$$f_1(v)=\underset{m(0)}{Min}[\phi(T)x(0)+G(T)m(0)-r]^2 \tag{13}$$

であるので

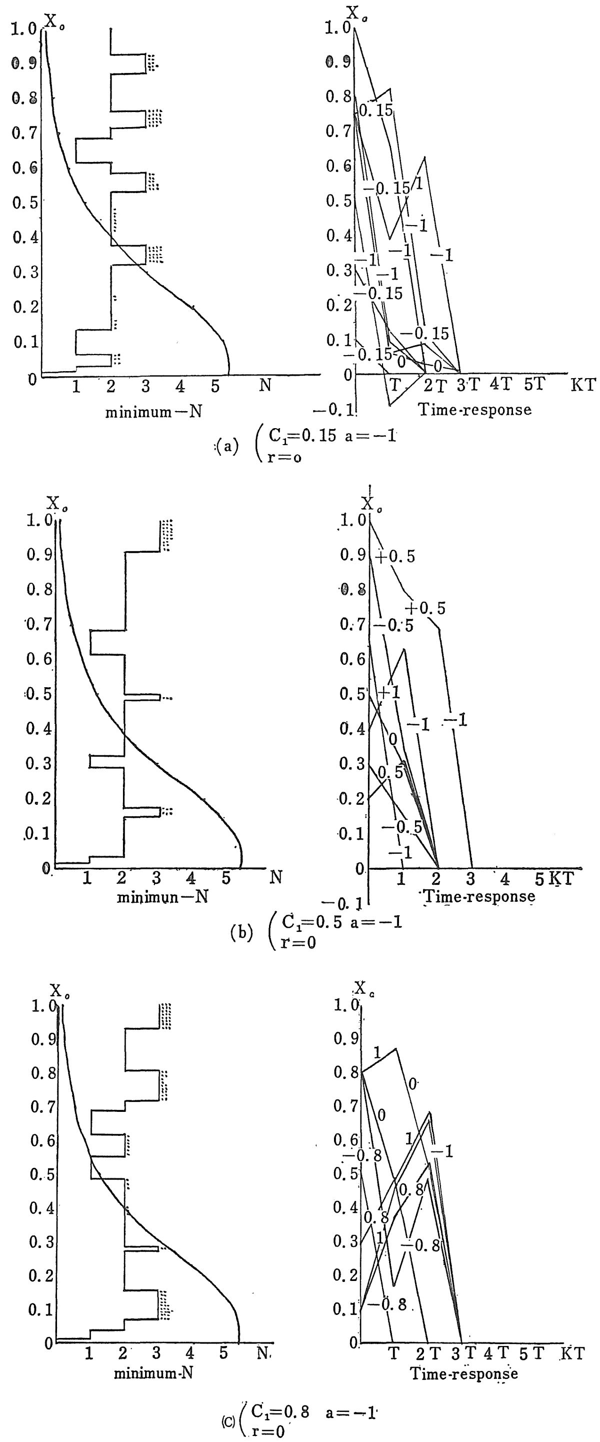
(12)式を用いて $f_N[x(0)]$ を求めることができる.

つぎに，制御信号mについて

集合$C_L=\{M,C_{L-1},\cdots,C_1,C_0,-C_1,\cdots,-C_{L-1},-M\}$

$m\in C_L$

であるものとすれば，L は量子化レベルの数 $2L+1$ を与えるものである．またこの Variable-N の terminal



Fig—1

control に対し計算をストップさせるため条件 $f_N[\boldsymbol{x}(0)]\leq\beta$ が必要である．さらにプロセスの状態変数の制御初期における確率分布を正規分布と仮定すれば，制御信号mの最適量子化の定義を次のようにすることができる．

$$E_T=\iint_{\Gamma}\cdots\cdots\int N(x_{10},x_{20},\cdots,x_{no})P(x_{10},x_{20},\cdots,x_{no})\,dx_{10}dx_{20}\cdots dx_{no} \tag{14}$$

とおく．

ただし $P(x_{10},x_{20},\cdots x_{no})$：初期状態ベクトルの確率密度関数

Γ：状態空間の問題としている領域

関数Nは許容誤差 $\sqrt{\beta}$ を用い関数 $f_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ N,\ N+1,\cdots)$ から求めることができるので，最適量子化信号レベル C_i は (14)式の段階数 N の期待値 E_T を最小とするように選ぶことができる．

すなわち

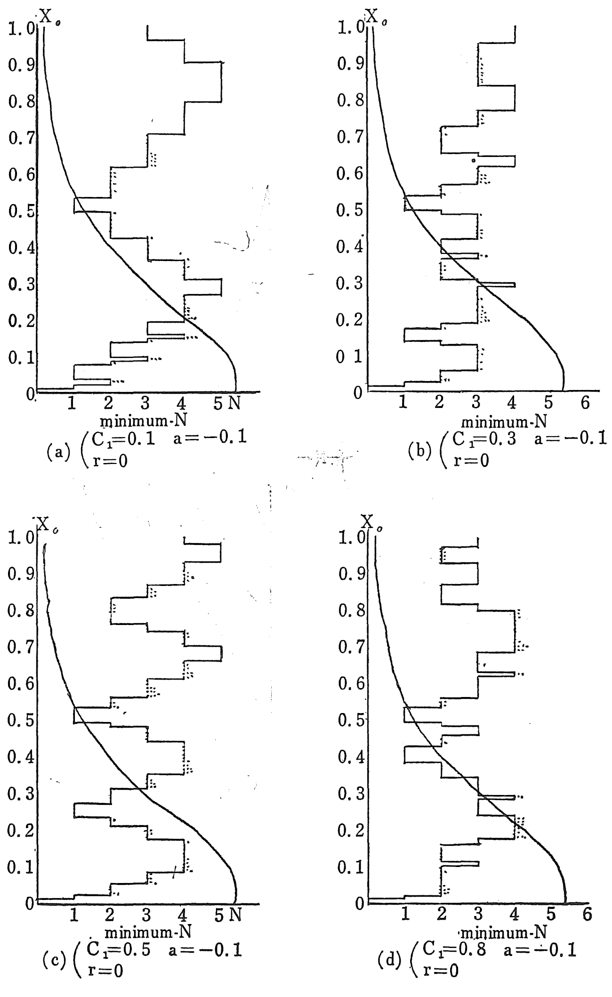
$$e_T=\underset{C_1,C_2,\cdots C_{L-1}}{Min}\ E_T \tag{15}$$

ここで制御の集合 C_L の要素のうち，M 及び Co は 1 と 0 にそれぞれ fix させておく．

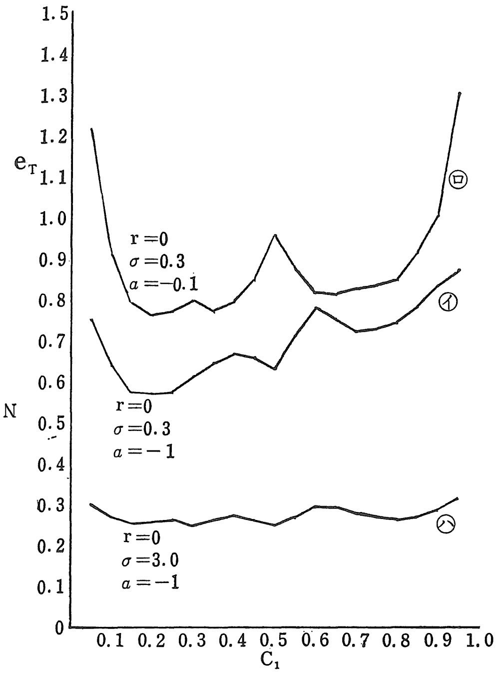
4. 計算例とその結果[7]

$\dot{x}=ax+dm$ の状態遷移方程式

$x(\overline{k+1}T)=e^{aT}x(kT)+\dfrac{d}{a}(e^{aT}-1)m(kT)$ において $a=-1$，又は -0.1，$d=1$，$T=0.5$，量子化数 $L=2$ として制御変数 $m\in\{1,C_1,O,-C_1,-1\}$ $\beta=0.0001$，x_0 の領域 Γ は -1 から $+1$ までの値，interval 0.01 をとり正規分布 $p(x_0)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{x_0{}^2}{2\sigma^2}}$，標準偏差 σ は 0.3 又は 3 の値とした．ここに目標値 $r(NT)=0$ と $r(NT)\neq0$ の二つの場合について得られた結果を検討する．



Fig—2



Fig—3 最適量子化レベル C_1 を与える曲線

(1) 目標値 $r(NT)=0$ の場合

Fig–1 の$(a)(b)(c)$ の左側の図は縦軸に初期状態変数 x_0，横軸に最小段階数Nをとってある．いくつかの点が図中に記入されているのは初期値 x_0に対して二通り以上の制御政策が存することを示している．従って点が記入されていないx_0に対しては一通りの最適政策しかないことを示す．このことは対応する右側の図の時間応答の例にみいだすことができる．また左側の図の曲線は標準偏

差σが0.3である正規分布曲線である．右図は横軸に制御のサンプリング時間をとり縦軸に代表的な状態初期値x_0をとりあげ，その初期値から出発した場合の Time-response を示してある．制御経過を示すいくつかの折線の上の数字はそれぞれのサンプリング時に加える最適な制御mの値である．

Fig-3のe_T-C_1曲線は制御信号レベル $\{1, C_1, 0, -C_1, -1\}$ のうち C_1 の如何なる値に対してNの期待値が最小になるかを示しており，曲線(イ)では最適量子レベルが0.2 であることを知る．

曲線(イ)と(ロ)を比較すると，同じ $\sigma=0.3$ であるが曲線(ロ)では $a=-0.1$ でプラント の減衰の時定数が大きいためステージ数Nが増すので全体的に e_T 曲線が上方にある．つぎに曲線(ハ)は(イ)に比較すると，$a=-1$ で時定数は同じであるが，標準偏差 σ の値が 3.0 で大きいので分布が著しく uniform な形になって小さな分布密度をとること及び初期状態 x_0 の領域 Γ は -1 から $+1$ までで，この領域外では $\int N.pdx$ の計算を cut off したことが原因で全体的に $e_T=Min\int Npdx$ の値は小さくなっている．

この場合大切なことは uniform な分布では最適量子レベル C_1 はあえて曲線(ハ)でみる如き0.5でなくともよく，量子化をすることの意義がうすめられるということである．

Fig-2 について各$(a)(b)(c)(d)$の図をFig-3の曲線(ロ)に関係づけてみると，図(a)で$C_1=0.1$のときのNの総面積は図(c)の $C_1=0.5$ のときのNの総面積より大きいが，分布密度の大きい中央付近のNの面積が極めて小さいため，e_T の値は図(a)の方が小さくなり，$C_1=0.1$を制御信号として用いる方が $C_1=0.5$ を用いるより一層効果的であるといえる．

(2)　目標値 $r(NT)\neq 0$ の場合

(イ)　$r(NT)=0.2$ のとき

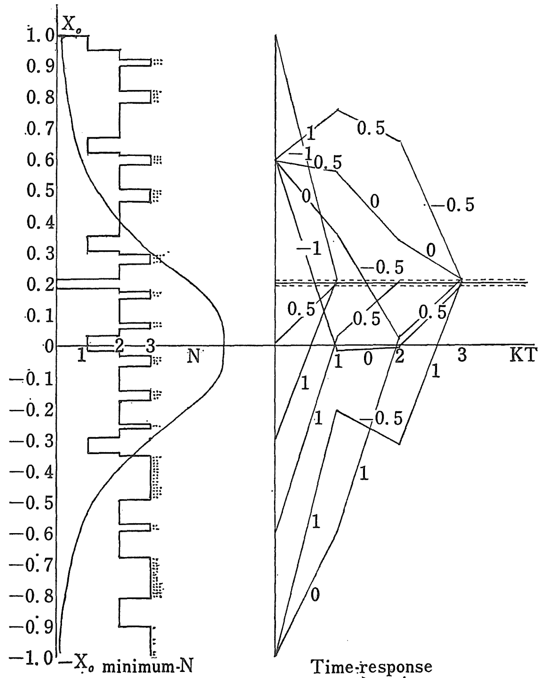
Fig-4$(a)(b)$ にはそれぞれ $C_1=0.05$ $C_1=0.5$を選んだときの関係曲線を示す．Fig-6 の曲線(イ)にみるように，この最適信号レベルは $C_1=0.5$ である．

(ロ)　$r(NT)=0.8$ のとき

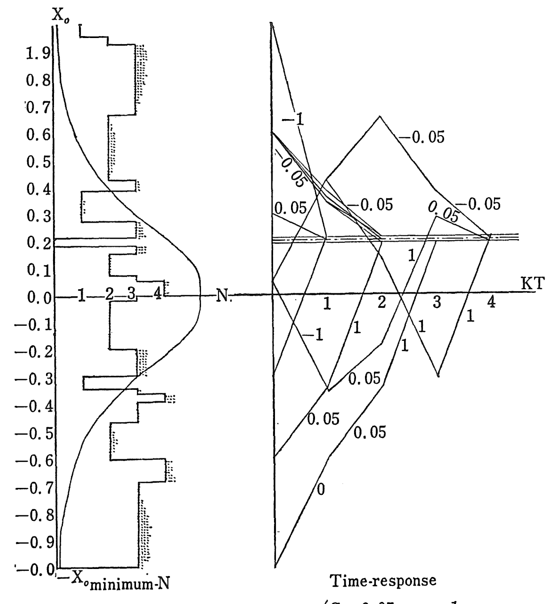
Fig-5$(a)(b)$ 及び Fig-6 の(ロ)に関係曲線を示す．

$r(NT)=0.2$ のときに比較して，N の面積はさらに一層大きくなり，Fig-6において曲線(ロ)の e_T の値は全般的に曲線(イ)より大きくなっている．このことは$r(NT)=0.2$ さらに $r(NT)=0.8$ のように分布密度の大きい中央付近から遠く離れた所に目標値をとると，制御段階数Nは Fig-4. Fig-5 の Time-response にみる如く大きくなっていくことから明らかである．

この時の最適信号レベルは $C_1=0.9$ となる．



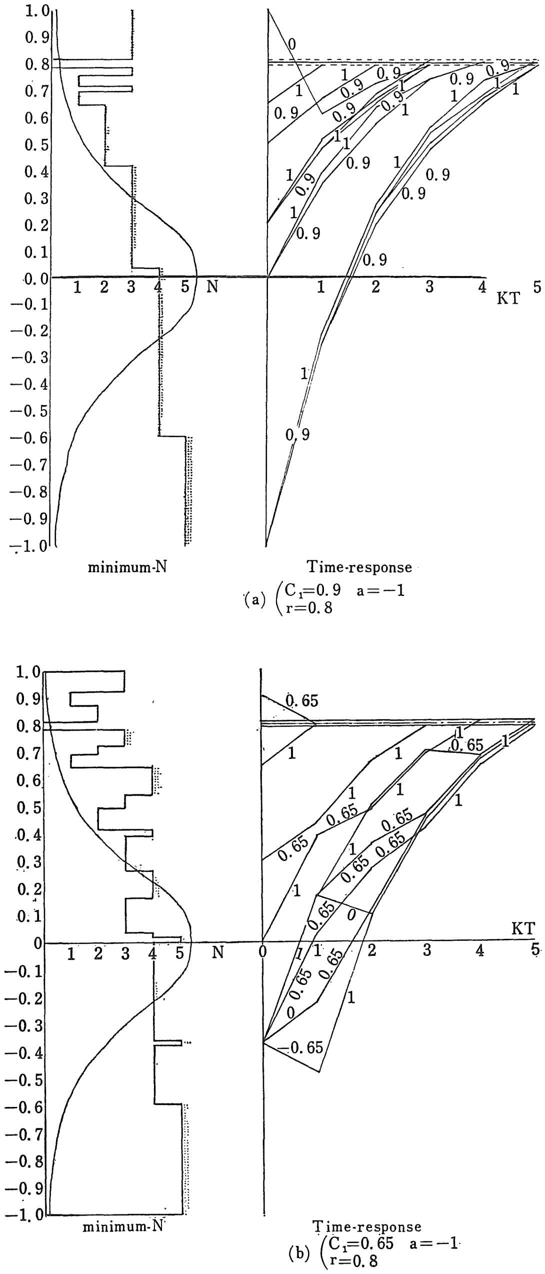
(a) $\begin{pmatrix} C_1=0.5 & a=-1 \\ r=0.2 & \end{pmatrix}$



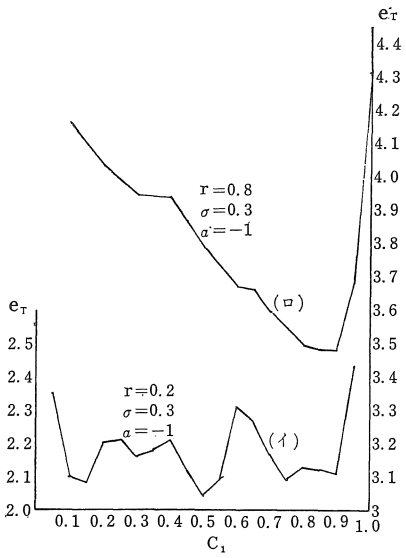
(b) $\begin{pmatrix} C_1=0.05 & a=-1 \\ r=0.2 & \end{pmatrix}$

Fig—4

なお $r(NT)=0$ の場合の Fig-1, Fig-2 において Minimum-N 及び Time-response の曲線は横軸に関して対称であるために図形半分を省略してある．



Fig—5



Fig—6　最適量子制御レベル C_1 を与える曲線

(3)　結果について

イ．Fig-3 及び Fig-6 の最適信号レベル C_1 を与える曲線は一見して規則性が極めて少ないようにみえる．評価関数 $I_N=\sum_{k=1}^{N} x'(kT)Q(kT)x(kT)$ とおいて制御の各過程の Return を考慮した Conventional Control(8) の場合，上の e_T-C_1 曲線が比較的規則性があることに比較すると，この Minimum-N Control に於て解析的に最適レベル C_1 をみつけることは困難で，その理由からも電子計算機の高速性に期待する願いは今后更に強くなるといえる．

ロ．$\sqrt{\beta}$ は与えられた許容誤差でありプラントの dead zone と考えてもよく，制御対象の出力の状態値と目標値との差をこの値以内に収束させた時刻をもって制御終了としたのであるが，目標値 $r(NT)\neq0$ の場合は，始めに与えられたプラントの微分方程式の形のままでは制御をやめると，NT の時刻以后目標値を離脱して，安定点 0 の値に向って自然減衰していくことが考えられるので，目標値が始めに与えられたときは制御装置によってプラントのパラメータを目標値に対応して変化させる必要が生じてくる．このような場合については改めて検討したい．

ハ．上記計算例において $L=2$ としたが，$L>2$ の如く制御信号の個数が多ければ，Minimum-N は更に小さくなることは当然考えられるが，この場合についても今后考えてみたい．

5. あとがき

この Minimum-N Control に直接関係する問題，β をパラメータにとり Minimum-N の N=1, 2, ……とした場合の Controllable な領域及び各制御信号の間の switching boundary について，さらにこれらの $r\neq0$ の一般的な問題について，改めて検討したいと思う．終りに DP による計算方法について協力いただいた本学皆福正彦氏にお礼申上げる．

6. 参 考 文 献

(1) Bellman：Adaptive Control Processes, 1961, Prinston

(2) Bellman：Applied Dynamic Programming

(3) 近藤　　：自動制御技術 7

(4) 宇田川他：オペレーションズ・リサーチ入門

(5) J.T.Tou：Optimum Design of Digital Control systems, 1963, Academic Press

(6) J.T.Tou：Modern Control Theory, 1964, Mcgraw

(7) 小林　　：第4回学術講演予稿集, 1965, 計測自制学会

(8) 小林　　：電四学会全連大講演予稿集, 昭和40.4