

負の重みとトリムド平均を用いた線形／非線形フィルタ

Linear/Nonlinear Filter using Negative Weights and Trimmed Mean

橋之口幸一郎[†]、菱田隆彰[‡]、井 研治[†]

Kouichirou HASHINOKUCHI[†], Takaaki HISHIDA[‡], Kenji INOMOTO[†]

Abstract For sampled input signal, the median filter with negative weights is considered as a kind of the nonlinear filter and some application is shown. It is well known that linear filter theory based on convolution operation is used widely on the other hand. This paper tries to deal with systematically two kinds of these filters with which these character differs. The method is adopting the trimmed mean in statistics. However, since the obtained median does not necessarily come to the central position of data in the case of a median with negative weights, a special method of removing in an order from sorted data is proposed. In order to investigate these filter characteristics, the computer experiment was performed using the white Gaussian random noise input. Consequently, it turned out that the original FIR filter characteristic is realizable by this filter using trimmed mean calculation. Since this method can specify between linear and non-linear types with one parameter, it can be used as a new analyzing method in digital signal processing.

1. まえがき

一般の時系列信号を対象とした非線形フィルタの一種に、負の重みを考慮したメジアンフィルタの応用が示されている¹⁻³⁾。一方、たたみこみ演算を基本とする線形フィルタ理論が広く用いられているのは周知の通りである。本論文は、これら性質の異なる2種類のフィルタを、トリムド平均⁴⁾を用いることによって統一的に取り扱うことを試みる。

2. 線形フィルタ理論

サンプル値系列を考え、次のように入出力信号を定義する。

・入力信号；

$$\{x_i\} = x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1} \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

・出力信号；

$$\{y_i\} = y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+k-1} \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

次に以下のFIRデジタルフィルタを考える。

・タップ数； $k = 2m + 1$ ($m = 0, 1, 2, \dots$)

・フィルタ係数；

$$\begin{aligned} \{h_i\} &= h_0, h_1, \dots, h_{k-1} \\ &= h_0, h_1, \dots, h_{m-1}, h_m, h_{m+1}, \dots, h_{2m} \end{aligned}$$

線形フィルタの出力は、たたみこみ演算記号*を用いて次

式で表される。

$$\begin{aligned} y_n &= x_n * h_n \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} h_i \cdot x_{n-i} \\ &= h_0 \cdot x_n + h_1 \cdot x_{n-1} + h_2 \cdot x_{n-2} + \\ &\quad \dots + h_{k-1} \cdot x_{n-k+1} \end{aligned}$$

ところで、FIRフィルタが直線位相の場合、フィルタ係数には次の条件が付く⁵⁾。

$$h_0 = h_{2m}, \quad h_1 = h_{2m-1}, \quad \dots, \quad h_{m-1} = h_{m+1}$$

この場合、FIRフィルタの出力 y_n は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} y_n &= h_{k-1} \cdot x_n + h_{k-2} \cdot x_{n-1} + h_{k-3} \cdot x_{n-2} + \\ &\quad \dots + h_0 \cdot x_{n-k+1} \\ &= h_0 \cdot x_{n-k+1} + h_1 \cdot x_{n-k+2} + \\ &\quad \dots + h_{k-1} \cdot x_n \end{aligned}$$

ここで n を $n-k/1$ に置き換えると次式が得られる。

$$\begin{aligned} y_{n+k-1} &= h_0 \cdot x_n + h_1 \cdot x_{n+1} + h_2 \cdot x_{n+2} + \\ &\quad \dots + h_{k-1} \cdot x_{n+k-1} \end{aligned}$$

[†] 愛知工業大学大学院工学研究科電気電子工学専攻 (豊田市)

[‡] 愛知工業大学工学部電気学科情報通信工学専攻 (豊田市)

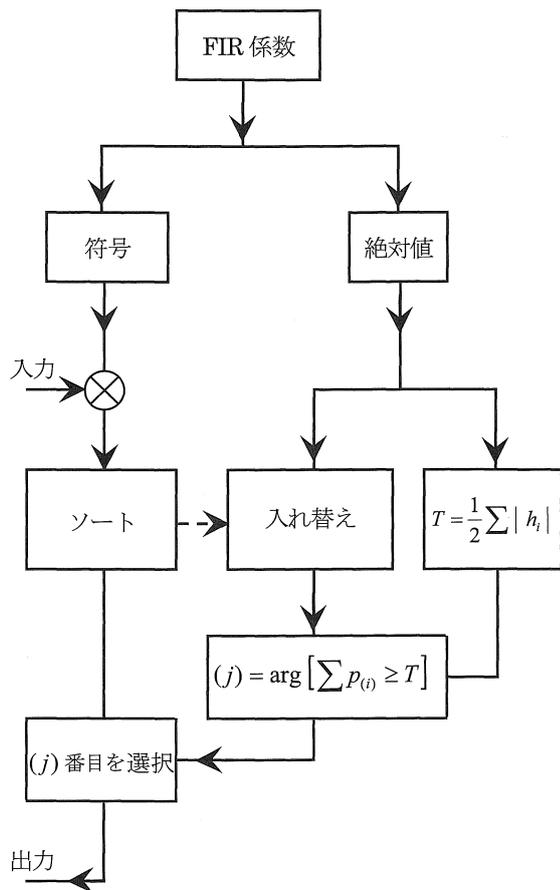


図1 重みつきメジアンフィルタのフロー図

次に新しく、

$$p_{n+i} = h_i \cdot x_{n+i}$$

とおく。

また、 $p_{n+i} \sim p_{n+i+k-1}$ の k 個の平均演算を、

$$\mu_{n+i,k} = (p_{n+i} + p_{n+i+1} + \dots + p_{n+i+k-1}) / k$$

で示そう。

これらを用いると、線形フィルタの出力は、

$$y_{n+k-1} = k \cdot \mu_{n+i,k}$$

で、表すことができる。

3. 負の重みつきメジアンフィルタ¹⁾

負の重みを導入したメジアンフィルタとは、周波数特性を定める FIR 係数をもとに次のように構成する。

- 1) まず FIR 係数 h_i を符号 $\text{sign}(h_i)$ と絶対値 $|h_i|$ に分けて取り扱う。ここで、記号 $\text{sign}(x)$ は値 x の符号を取り出す演算である。
- 2) 符号は、FIR 係数を 1 ビットで量子化したものであって、これと入力信号と乗じた積、

$$\text{sign}(h_i) \cdot x_i$$

を利用する。

この積は入力信号に 1 ビットで量子化した大まかな周波数特性を作用させたものといえるが、これを大きさの順にソートする。このソートにおける入れ替え方法が後で必要になる。

- 3) 一方、絶対値 $|h_i|$ はメジアンフィルタの重みとして利用する。入力信号に行ったソート方法と同じ入れ替えを、この重み系列にも施したものを $|h_{(i)}|$ で表す。
- 4) その後、ソート後の重み系列を小さい方から累積し、その値が閾値 T を越えるときの添え字 (j) を求める。
- 5) $\text{sign}(h_{(j)}) \times x_{(j)}$ を出力する。

ここで用いた閾値 T は、

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} |h_i|$$

で示される値で、FIR 係数の絶対値の総和の半分である。

以上の手順をフローチャートに表して図 1 に示す。

線形フィルタとの整合性が必要となるため、以後は出力として、

$$\text{sign}(h_j) \cdot x_j \cdot |h_j|$$

つまり $h_j \cdot x_j$ を用いることにする。

4. トリムド平均⁴⁾

トリムド平均 (trimmed mean) は、トリム平均、刈り込み平均、切り落とし平均、調整平均などと呼ばれることもある統計的推定量の一つである。

今、ソートの対象とするデータを、

$$p_0, p_1, \dots, p_{k-1}$$

とする。これらが大きさの順にソートされ、次の順序統計量が得られたとする。

$$p_{(0)}, p_{(1)}, \dots, p_{(k-1)}$$

トリムド平均は、 $k = 2m + 1$ 個のデータをソートし、上側と下側それぞれ t 個 ($0 \leq t \leq m$) を除き、次式で定める平均を用いる方法である。

$$\mu_{t+1, k-2t} = \frac{1}{k-2t} \sum_{i=t}^{k-t} p_{(i)}$$

$$t = 0, 1, \dots, m$$

パラメータ t によってトリムド平均は次のように解釈できる。

$t = 0$; すべてのデータを用いる方法なので、これは通常の平均操作に等しい。

$t = m$; 全データ個数は $k = 2m + 1$ なので、上側 m 個、下側 m 個を除けば、1 個だけ残る。これは結局メジアンを計算していることに相当する。

データ数 $k = 2m + 1$ の場合、メジアンは必ず中央にある。つまりトリムド平均に用いるデータは、ちょうど中央にメジアンがあり、メジアンの上下には同数のデータが配置されて対称になっている。そのため、上側から t 個のデータを除去した場合 ($0 \leq t \leq m$)、下側からも常に同数の t 個が除去できる。

一方、重みつきメジアンは重み係数を累積して、閾値 T を越えた index から重みつきメジアンを決定する方法である。つまり、入力サンプル値に依存して重みの並び替えが行われるので、重みつきメジアンが中央に来る保証はなく、非対称であるといえる。そのため、トリムド平均の考えを重みつきメジアンに応用するには、工夫が必要である。

5. 非対称な場合のトリムド平均

さて、データ数が $k = 2m + 1$ の場合、メジアンはデータの中心に等しく、その位置は (0 から数えはじめて) m 番目である。そしてトリムド平均とは、メジアンから離れたものから除去し、これらを平均計算に見込まない方法である。データはメジアンを中心に上下が同数のデータであるから、上下からそれぞれ同数のデータを除去することが可能である。

一方、重みつきメジアンでは同じことが行えない。つまり、全ての重みが等しい場合を除いて、重みつきメジアンの位置はデータの中心にくるとは限らない。そのため重みつきメジアンの両端からデータを除去する操作がうまく行えない。

このような場合、トリムド平均の考え方を重みつきメジアンに応用するには、どのような方針でデータを除去すればよいのだろうか？

いま、ソート後の重みつきメジアン位置が中央からずれた位置 j (図2 ▲印) の場合について考えてみる。

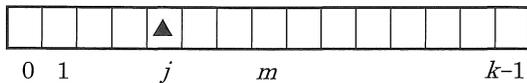


図2

データの中心位置は m 番目のデータであるが、今、 j 番目 ($j < m$) が重みつきメジアンに選ばれたとしよう。

このとき、データ全体を図3のようにA、B両群に分割する。

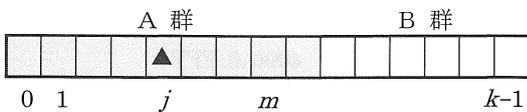


図3

A群には j を中心とする $2j + 1$ 個のデータを選ぶ。

残りをB群とする。B群のデータ数は偶数である。このとき、データの除去は次のようにしてすすめる。

1) まずB群のデータの中で、 j から離れているデータから順番に2個ずつ除去する (図4 ×印)。

このとき、 $2t$ 個のデータ除去がB群内で完了すれば、残されたデータで平均を計算する。

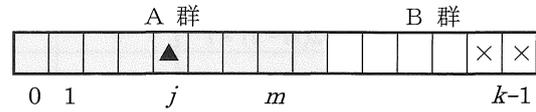


図4

B群から除去し終わると図5のようになる。

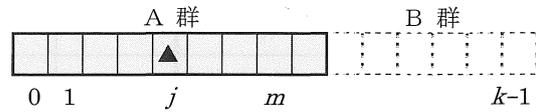


図5

2) B群で $2t$ 個のデータ除去が完了しない場合は、さらにA群のデータを除去する。

除去するものは、 j から離れているものから除去するが、上下に対称であるからトリムド平均と同じ方法で2個ずつ除去する (図6 ×印)。

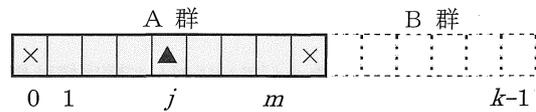


図6

このようにして、重みつきメジアンと最も離れているデータから順番に合計 $2t$ 個を除去する。

3) A群まで進んで $2t$ 個のデータが除去された状態は、図7のようになり、残されたデータについてトリムド平均と同じ方法で平均を計算すればよい。

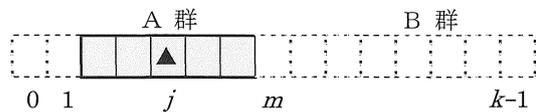


図7

ここでは $j < m$ の場合について説明したが、 $m < j$ の場合も上下が反転していることを念頭に置けば、ここに述べた方法と類似の考えでデータの除去が行える。

また $j = m$ の場合は、上下のデータ数が対称であるから、本来のトリムド平均が直ちに行える。

表1にはこれらの関係をまとめて表示した。このような方法を用いれば、重みつきメジアンについてもトリムド平均が利用できる。

表 1 除去する index

$j < m$ のとき			$j = m$ のとき			$j > m$ のとき		
t	index		t	index		t	index	
1	$2m$	$2m-1$	1	0	$2m$	1	0	1
2	$2m-2$	$2m-3$	2	1	$2m-1$	2	2	3
...
i	$2(m-i)+2$	$2(m-i)+1$	i	$i-1$	$2m-i+1$	i	$2j-2$	$2j-1$
...
$m-j$	$2j+2$	$2j+1$				$j-m$	$2(j-m)-2$	$2(j-m)-1$
$m-j+1$	0	$2j$				$j-m+1$	$2(j-m)$	$2m$
$m-j+2$	1	$2j-1$				$j-m+2$	$2(j-m)+1$	$2m-1$
...
$m-j+i$	$i-1$	$2j-i+1$				$j-m+i$	$2(j-m)+i-1$	$2m(i-1)$
...			
m	$j-1$	$j+1$	m	$j-1$	$j+1$	m	$j-1$	$j+1$

トリムド平均のパラメータ t はデータの除去を示す数値であり、データ数が $k = 2m + 1$ 個ある場合、ここから $2t$ 個を除去して平均を算出することを意味している。このパラメータ t は、値が大きくなるにつれて線形フィルタから離れてゆくと考えてよいだろう。

6. 負の重みとトリムド平均を用いる非線形フィルタ

このようにして、重みつきメジアンに対して順序統計量が非対称になってもトリムド平均が求められるので、これを用いてフィルタを構成する。

その計算手順は次のようになる。

- 1) FIR 係数 h_i を符号 $sign(h_i)$ と絶対値 $|h_i|$ に分ける。
- 2) $p_i = sign(h_i) \cdot x_j$ を、その大きさでソートする。
ソート後の順序統計量を $p_{(i)}$ とする。
- 3) p_i の大きさで絶対値 $|h_i|$ を並び替える。これを $|h_{(i)}|$ とする。
- 4) $|h_{(i)}|$ を小さい方から累積する。その値が閾値 T を越えるときの添え字 (j) を、重みつきメジアンの位置とする。
- 5) $p_{(i)} \times |h_{(i)}|$ を用意し、これらについてパラメータ t のトリムド平均を求め、出力とする。

出力を書き換えると、

$$p_{(i)} \times |h_{(i)}| = sign(h_{(i)}) \times x_{(i)} \times |h_{(i)}| = x_{(i)} \times h_{(i)}$$

のパラメータ t に関するトリムド平均になっている。 $t = 0$ つまりすべてのデータについて平均する場合、出力は、

$$\sum p_{(i)} \cdot |h_{(i)}| / k = \sum x_{(i)} \cdot h_{(i)} / k = \sum x_i \cdot h_i / k = x_i^* h_i / k$$

となつて線形フィルタの出力の $1/k$ に一致する。

このようにトリムド平均と重みつきメジアンを組み合わせた出力は、パラメータ t に従い、線形フィルタ、トリムド平均フィルタ、重みつきメジアンフィルタに切り替えることができる。

7. 実験方法と結果

ここで提案した重みつきメジアンにトリムド平均を応用するフィルタ、すなわち非対称な場合のトリムド平均を用いて非線形デジタルフィルタを構成した場合、その特性を調べるため計算機実験を行った。

実験の条件は次の通りである。

- データ数(FIR フィルタのタップ数) ; $k = 2m + 1 = 13$
- フィルタ係数 ; $0.012, 0.060, 0.023, -0.048, -0.052, 0.018, 0.063, 0.018, -0.052, -0.048, 0.023, 0.060, 0.012$
- 入力信号 ; 白色ガウス雑音 (平均 0、パワ=1) のサンプル値
- フィルタ特性 ; 16 分割した帯域通過フィルタ(BPF)の 7 番目の帯域
BPF の通過帯域は、実験結果を示すグラフにおいて 480~560Hz の周波数に相当する。
- 周波数特性の測定方法 ; 4096 点 FFT
- 窓関数 ; Hamming 窓
- 周波数特性の表示法 ; 16 点ずつを平均し、得られた 256 点から片側 128 点分について実効値を表示
- トリムド平均のパラメータ t ; 0、3、6 の 3 種類

表2 t と用いる FIR 係数の rms、および規格化 gain

t	FIR 係数の rms	規格化 gain
0	0.0422	1
3	0.0457	0.924
6	0.063	0.670

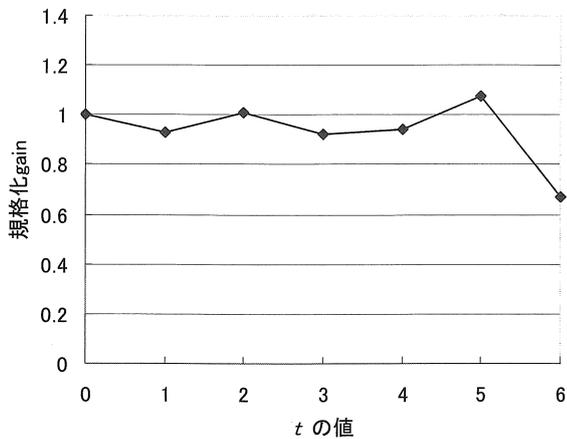


図8 t と用いた FIR 係数における規格化 gain

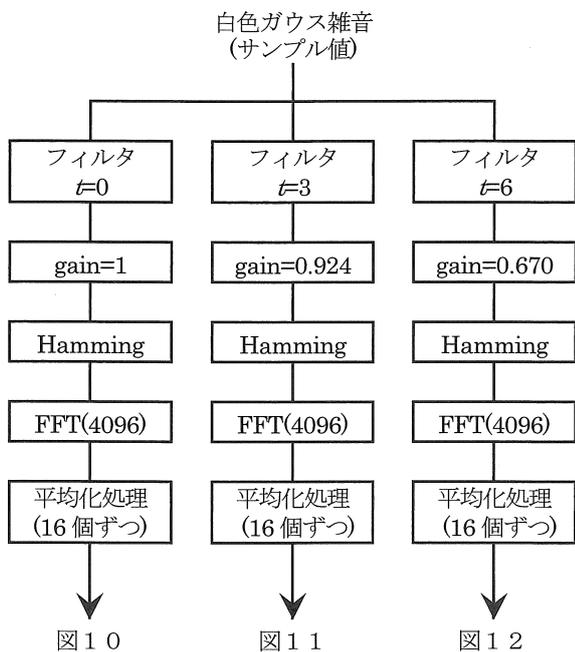


図9 実験のブロック図

ところで、トリムド平均のパラメータ t が異なると、使用される FIR 係数の個数もそれにつれて変化し、この FIR 係数の値によって出力信号の実効値も増減する。この原因はパラメータ t によって用いる FIR 係数の 2 乗平均値(rms)が表 2 のように変化することに起因する。

一方、周波数特性は条件を揃えて比較できることが好まし

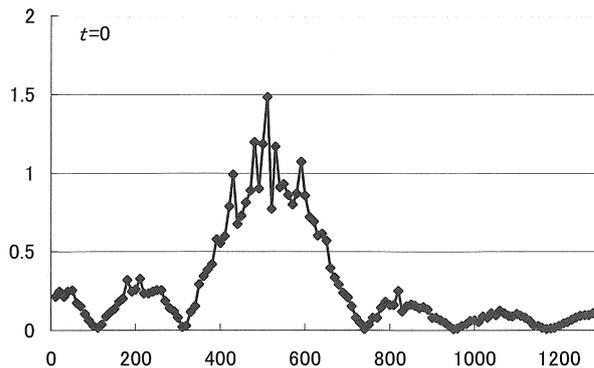


図10 $t=0$ のトリムド平均を用いた BPF (線形フィルタに相当)

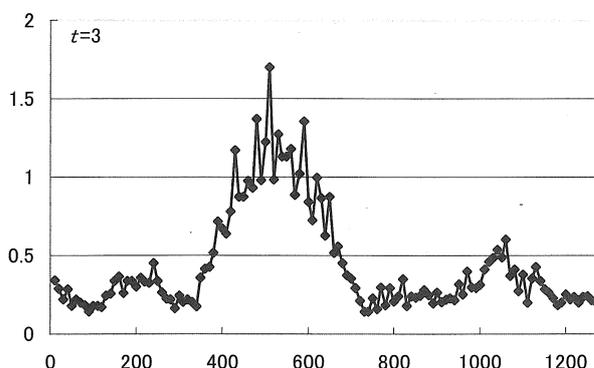


図11 $t=3$ のトリムド平均を用いた BPF

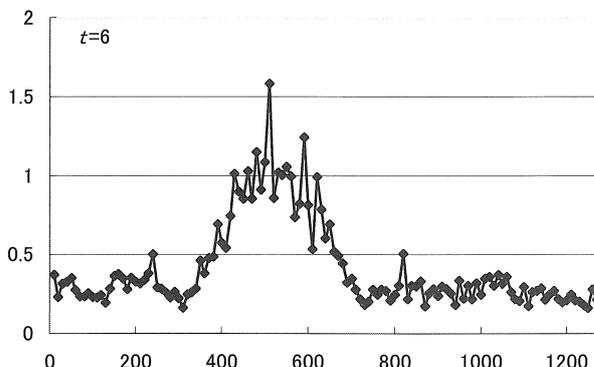


図12 $t=6$ のトリムド平均を用いた BPF (メジアンフィルタに相当)

いので、 t が異なる場合でも使用される FIR 係数の実効値に合わせて実験値を規格化する必要がある。ちなみに今回使用した FIR 係数について、 t による規格化 gain を求めると図 8 のようになる。

図 9 には、実験のブロック図と実験結果との関係を示した。ここで行った一連の実験では、条件を揃えるため入力白色ガウス雑音は同一のものを用いている。図 8、あるいは表 2 に示した規格化 gain は、図 9 におけるフィルタの出力部分に挿入され、分析信号の実効値をそろえるために用いられてい

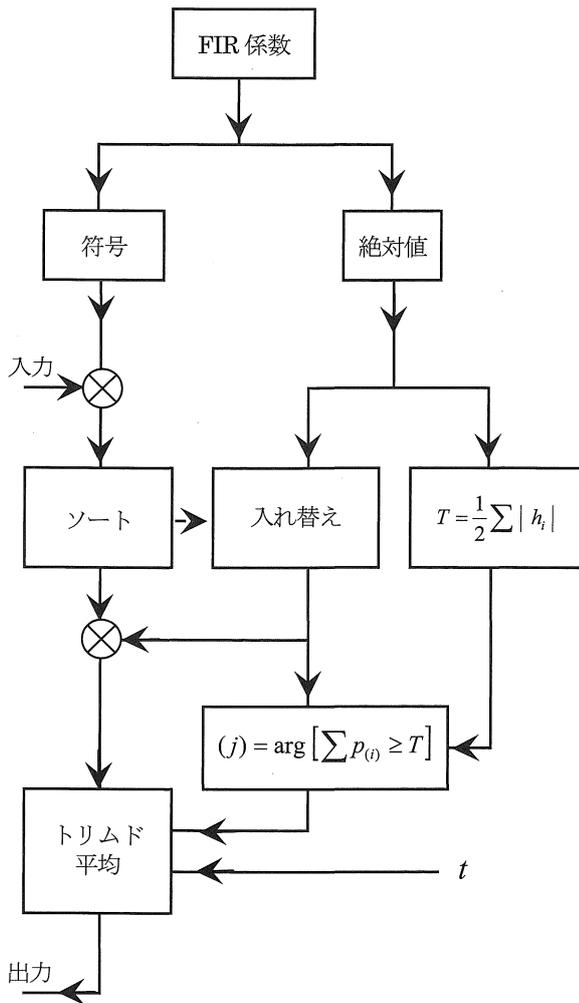


図 1 3 トリムド平均を用いたフィルタのフロー図

る。

以上に述べた方法で得られた実験結果を、図 1 0～1 2 に示す。図の横軸の数値は周波数で、0～1280[Hz]に対応している。また BPF の通過帯域はこの周波数で 480～560[Hz]である。

3 枚の図を通じて、パラメータによる顕著な周波数特性の違いは認められず、

- (1) たたみこみによる線形フィルタ
- (2) トリムド平均を用いた非線形フィルタ
- (3) 重みつきメジアンフィルタ

の 3 種類は、いずれも指定した同じ BPF 特性を実現していることがわかる。

今回提案するフィルタをフロー図にまとめて図 1 3 に示す。

8. 結言

本研究は、全く性質の異なる線形たたみこみ演算と、非線形フィルタである負の重みつきメジアンフィルタの間を、直線位相 FIR フィルタ係数を用いた順序統計量とトリムド平均によって表現できることを示した。

白色ガウス雑音入力を用いた計算機実験では、それぞれ元の FIR フィルタ特性が実現できることがわかった。

本法の特徴の一つは、線形フィルタからの離れ具合を一つのパラメータで指定できることである。特に、メジアンやトリムド平均は、コーシー雑音など非ガウス性の雑音、例えばレコードの音源に存在するスクラッチノイズ⁶⁾などの除去性能が高いと思われる。

本法ではパラメータ t を調節することにより、ノイズ除去性能を変化できることから、新しい信号処理方法としての応用が可能であろう。

参考文献

- 1) Gonzalo R Arce; A General Weighted Median Filter Structure Admitting Negative Weights. IEEE Transactions on Signal Processing, pp.3195～3205, Vol.46, No.12 (1998)
- 2) Ilya Shmulevich, Gonzalo R. Arce; Spectral Design of Weighted Median Filters Admitting Negative Weights. IEEE Signal Processing Letters, pp.313～316, Vol.8, No.12 (2001)
- 3) 橋之口幸一郎、田口文子、井 研治;負の重みを用いたメジアンフィルタによる帯域フィルタの性質.愛知工業大学研究報告,第 39 号 B,pp.99～105, (2004)
- 4) 柴田義貞;正規分布.東京大学出版会, p.131 (1981)
- 5) 中村尚五; ビギナーズデジタルフィルタ、東京電機大学、p.48 (1989)
- 6) Simon J. Godsill & Peter J. W. Rayner; Digital Audio Restoration. Springer, p.99, (1998)

(受理 平成 17 年 3 月 17 日)