

モーメントを用いた連続音声のピッチ周波数分布に関する研究

Symmetric Analysis by Mathematical Moment Function applied to the Pitch Frequency Distribution of Continuous Speech.

壺井 晃徳[†] 菱田 隆彰^{††} 鈴木 晋^{††} 井 研治^{††}

Akinori TSUBOI, Takaaki HISHIDA, Susumu SUZUKI, Kenji INOMOTO

Abstract: In the speech signal, not only linguistic information but other various information is included. This paper describes about the shape of the pitch distribution using cepstral technique to extract these additional information. The symmetricity of the pitch frequency distribution is evaluated by using a moment (the mean, the variance, the skewness, and the kurtosis). Generally a pitch frequency distribution of a continuous speech has long tail to higher frequency. To improve the symmetricity, the logarithm transform is applied to the calculated data. Investigations were made on how the conversational speed, the voice power, and the speech intelligibility effects on the distribution shape.

1. まえがき

音声には言語的な情報だけでなく多様な情報が含まれているが¹⁾, 本研究は其中で感情的な面に注目した研究である. 音声波形は声帯で発生された周期的な波形が, 声道で変調をうけることによって生成される. またこの音声信号は有声音と無声音に大別され, 有声音には音声波形に相似的な波形が繰り返し観測される. その繰り返し周期を基本(ピッチ)周期, その逆数をピッチ周波数という. ここではピッチの推定に波形の短時間振幅スペクトルの対数を逆フーリエ変換したものとして定義されるケプストラムを用いている. 本研究ではピッチ周波数の時間的な頻度分布に対して, その形状をモーメント(平均, 分散, 歪度, 尖度)を用いて定量的に評価するとともに, 分布形状の対称化のための対数変換の導入, 感情を擬似パラメータとしたピッチ周波数への影響について, それぞれ実際の音声試料を用いて解析をおこない, その結果から考察する.

2. ピッチ分布

有声音形にあらわれる繰り返し周期は声帯振動の基本周期でありピッチ周期と呼ばれ, またその逆数はピッチ周波数と定義されている. ピッチ周波数の推定に関する

研究は古くから行われているが, 今なお決定的な方法は確立されていないといわれている²⁾. 本研究では次に示すケプストラムを用いてピッチを推定している.

2・1 ケプストラム³⁾

ケプストラム(cepstrum) $c(\tau)$ は, 波形の短時間振幅スペクトル $X(\omega)$ の対数の逆フーリエ変換として定義され, スペクトル包絡と微細構造を近似的に分離して抽出できるという特徴がある. 音源と声道のインパルス応答のフーリエ変換を $G(\omega)$ および $H(\omega)$ で表わすと, 次の関係が得られる.

$$X(\omega) = G(\omega)H(\omega) \quad (2.1)$$

この対数を求めると,

$$\log |X(\omega)| = \log |G(\omega)| + \log |H(\omega)| \quad (2.2)$$

となる. 次に周波数 ω を変数として逆フーリエ変換する. これをケプストラムと呼び, これはフーリエ変換を記号 \mathcal{F} で表わすと,

$$c(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \log |X(\omega)| = \mathcal{F}^{-1} \log |G(\omega)| + \mathcal{F}^{-1} \log |H(\omega)| \quad (2.3)$$

となる. これを次式で示すように離散フーリエ変換(DFT)で求める場合は, 波形の標本化の場合と同様に折り返しが生ずるので, 変換の基底の大きさ N は十分大きくとる必

[†] 愛知工業大学 工学研究科 電気電子工学専攻(豊田市)

^{††} 愛知工業大学 情報通信工学科(豊田市)

要がある.

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \log |X(k)| e^{j2\pi kn/N} \quad (0 \leq n \leq N-1) \quad (2.4)$$

ケプストラムというのは, スペクトルを逆変換するという意味を含めて, spectrumをもじって作った造語であり, その横軸はfrequencyをもじってケフレンシ(quefrensy)とよばれる. ケフレンシのディメンションは周波数領域からの逆変換であるから時間になる.

さて, (2.2)右辺第1項はスペクトル上での微細構造であり, 第2項はスペクトル包絡である. したがって両者の逆フーリエ変換には大きな違いがあり, 第1項は高ケフレンシ部のピークになり, 第2項は0から2~4ms程度の低ケフレンシ部に集中する. そのため, 高ケフレンシ部のピークによって音源の基本(ピッチ)周期が求まり, 低ケフレンシ部のみを用いてフーリエ変換することによって対数スペクトル包絡が, またそれを指数変換すればスペクトル包絡が求まる. 求まるスペクトル包絡の平滑さの度合いは, 低ケフレンシ部のどれだけの成分を用いるかによって変化する. 種々のケフレンシ成分を分離する操作を, フィルタ(filter)をもじってリフタ(lifter)と呼ぶ.

3. 分布形状の数量化法

3.1 基本統計量

確率密度関数を $f(x)$ としたとき, 分布の平均(mean) μ は,

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (3.1)$$

であり, 分散(variance) σ^2 は,

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \quad (3.2)$$

となる. また, 分散の平方根, つまり σ を標準偏差(standard deviation)という.

分布の偏りを表わす量として,

$$\beta_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^3 f(x) dx / \sigma^3 \quad (3.3)$$

$$\beta_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^4 f(x) dx / \sigma^4 \quad (3.4)$$

が一般的に知られている.

β_1 は歪度(skewness)と呼ばれ, 分布の非対称性に関係した量になる. β_2 は尖度(kurtosis)と呼ばれ, 分布の尖りに関係する量になる⁴⁾⁵⁾. 歪度, 尖度については以下で詳しく述べる.

確率変数が離散的な場合, μ , σ^2 , β_1 , β_2 はそれぞれ次のようになる.

$$\mu = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) \quad (3.5)$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 f(x_i) \quad (3.6)$$

$$\beta_1 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^3 f(x_i) / \sigma^3 \quad (3.7)$$

$$\beta_2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^4 f(x_i) / \sigma^4 \quad (3.8)$$

次に実際にデータ(標本値)が n 個得られた場合を考えると, 前述の式は,

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (3.9)$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (3.10)$$

$$b_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 / s^3 \quad (3.11)$$

$$b_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 / s^4 \quad (3.12)$$

で与えられる. ここで, \bar{x} は平均, s^2 は分散, b_1 は歪度, b_2 は尖度に対応する.

3.2 モーメント

k 次のモーメント(moment)を次式のように定義する.

$$E[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx \quad (3.13)$$

$$= \sum_{i=1}^n (x_i)^k f(x_i) \quad (3.14)$$

(3.13)は確率密度関数が連続関数の場合, (3.14)は離散関数の場合である. (3.1)から平均 μ は1次のモーメントと等しく,

$$\mu = E[X] \quad (3.15)$$

分散 σ^2 は平均のまわりの2次モーメントになる.

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] \quad (3.16)$$

同様に平均のまわりの3次, 4次のモーメントはそれぞれ歪度 β_1 , 尖度 β_2 に相当する⁶⁾.

$$\beta_1 = E[(X - \mu)^3] / \sigma^3 \quad (3.17)$$

$$\beta_2 = E[(X - \mu)^4] / \sigma^4 \quad (3.18)$$

3.3 歪度, 尖度と分布形状

分布形状が正規分布のように左右対称である場合には歪度 β_1 は0になり, $\beta_1 < 0$ である場合, 分布形状は中央よりも右側に分布が偏り左に裾を長くひくような形状になる. 逆に $\beta_1 > 0$ である場合, 中央よりも左側に分布が偏

り右に裾を長くひくような分布形状になる。しかし分布の中央と最頻位置(山の頂上)という点に注目すると、 β_1 の符号は逆である方が直感的にわかりやすい。よって本研究では次式のように歪度を定義する。

$$b_1 = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 / s^3 \quad (3.19)$$

分布の形状と b_1 の符号の関係は図3.2, 3.3 のようになる。

次に尖度については、分布形状が正規分布型である場合 $\beta_2 = 3$ となり、 $\beta_2 < 3$ では中心位置の偏りの度合いが弱く、裾を長くひくような形状、逆に $\beta_2 > 3$ では中心位置の偏りの度合いが強くなり、裾が短い形状になることを示している。この場合においても正規分布型である尖度 β_2 を0とした方がわかりやすいことから、本研究では次式のように尖度を定義することとする。

$$b_2 = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 / s^4 \right] - 3 \quad (3.20)$$

分布の形状と b_2 の符号の関係は図3.4, 3.5 のようになる。

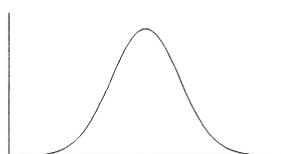


図 3.1: 正規分布 $b_1=0, b_2=0$



図 3.2: $b_1 < 0$



図 3.3: $b_1 > 0$



図 3.4: $b_2 < 0$

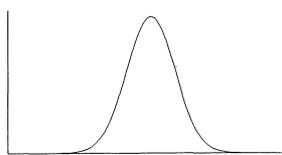


図 3.5: $b_2 > 0$

4. 分析

4.1 持続母音

一定のピッチを保つよう発音した音声はどの程度ゆらぎをもっているか調査する。音声試料A~Jは /a/ を5~10秒程度、一定のピッチを保つように発音し、それぞれピッチを変えて作成した。

音声試料Aのピッチ周波数の時間分布を図4.1に示す。この図から定常的な音声のピッチは、ある程度ゆらぎをもっていることがわかる。ピッチが緩やかな上昇傾向にあるのは、発音の始めであることが主な理由であると

思われる。

表 4.1: 持続母音のモーメント

試料	平均 [Hz]	標準偏差[Hz]	歪度	尖度
A	125.5	1.366	-0.022	-0.040
B	203.2	1.671	0.435	0.054
C	91.3	0.545	0.250	0.203
D	82.3	0.654	0.712	0.296
E	145.9	1.529	-0.001	-0.604
F	127.5	1.348	-0.461	0.767
G	121.8	1.195	0.093	-0.155
H	188.8	1.275	-0.150	0.215
I	155.0	1.421	-0.011	-0.634
J	104.7	1.300	0.641	-0.394

試料Aのピッチの頻度分布を図4.2に示す。分布は平均を中心にほぼ左右対称に正規分布型になっている。試料のモーメントを表4.1に、また、平均と標準偏差、歪度、尖度のそれぞれとの関係について図4.3, 4.4, 4.5に示した。図4.3からピッチの平均が上昇するに従って、標準偏差も増加していることがわかる。歪度、尖度は平均ピッチ周波数に関わらず、おおよそ-1.0から+1.0までに分布している。音声試料のピッチのサンプル数が少ないことから歪度、尖度は比較的誤差を多く含みやすいことを考慮に入れると、音声の定常的なゆらぎはほぼ正規分布に近似できることが予想される。

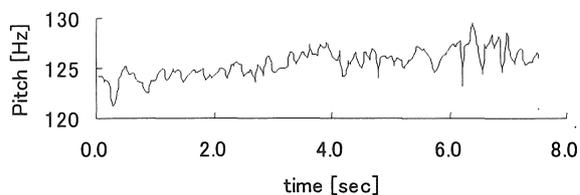


図 4.1: ピッチ周波数の時間分布

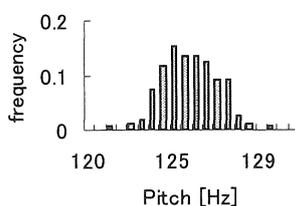


図 4.2: ピッチの頻度分布

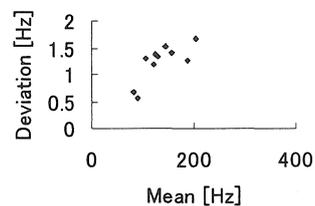


図 4.3: 標準偏差-平均

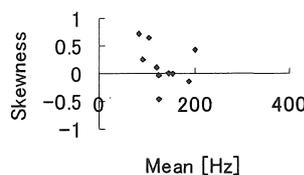


図 4.4: 歪度-平均

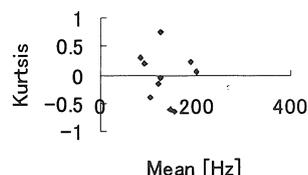


図 4.5: 尖度-平均

4・2 朗読音声

朗読音声において、ピッチ周波数の頻度分布とそのモーメントについて解析する。話者はすべて別の個人であり、それぞれ内容はニュースの朗読である。試料はサンプリング周波数 22.05kHz, 量子化ビット 16 ビットで記録されている。時間長は表 4.2 にある通り、一定の長さではない。

表 4.2: 音声試料

試料	話者	時間[sec]	試料	話者	時間[sec]
A	男性	181	F	男性	63
B	男性	53	G	男性	91
C	男性	45	H	女性	211
D	男性	79	I	女性	136
E	男性	66	J	女性	77

分析結果について、ピッチ周波数の頻度分布を図 4.6 に、歪度の時間変化を図 4.7 にそれぞれ示す。朗読音声での頻度分布は左右対称形に対してやや左側（低周波数側）に分布が偏り、右側（高周波数側）に裾を長くひく形状になる。また歪度の時間分布から、歪度の値はある程度の時間が経過するとほぼ一定になり、概ね負の値になっていることがわかる。歪度、尖度が平均や標準偏差といった個人的な性質が影響するものと関係性がほとんどないことから、連続音声におけるピッチの頻度分布はある程度定まった形状になると仮定できる。その形状はリニアな周波数軸に対して対称ではなく、偏りをもった分布形状になることより、これを正規分布のような対称な形状にする方法について考える必要がある。

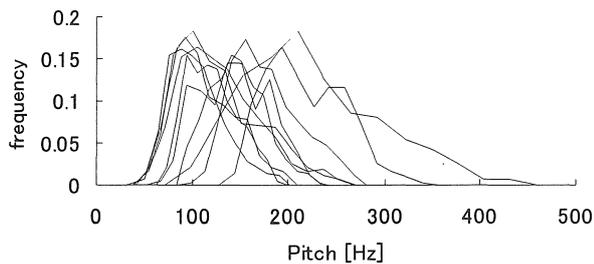


図 4.6: ピッチ周波数の頻度分布

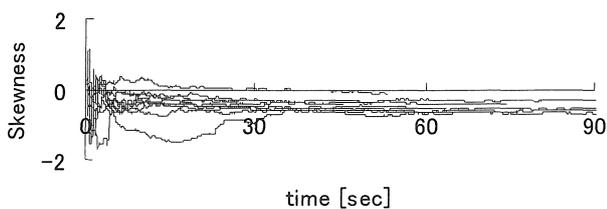


図 4.7: 歪度の時間変化

5. 対数変換

5. 1 対数変換の定式化

前節で朗読音声のピッチ分布は対称形ではない分布が多い結果が得られたことから、これを対称形にするために軸の対数化を試みる。軸の対数化はプロットされたピッチを次式で対数変換することでおこなう。

$$x'_i = \log_a \frac{x_i}{m} \tag{5.1}$$

これは図 5.1 に示すように、 m を中心に m/a から am までを -1.0 から $+1.0$ に写像することになる。音声のピッチ周波数は平均の 2 倍から 1/2 程度の範囲に分布することが統計的に知られていることから、(5.1) の底 a には 2 を用いる。また、変換後の平均を 0 にするために、中心 m には (5.2) で与えられる積の平均を用いる。

$$m = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \tag{5.2}$$

また各モーメント量は、平均が 0 であることから、

$$\text{平均: } \bar{x}' = 0$$

$$\text{分散: } s'^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x'_i - \bar{x}')^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i'^2$$

$$\text{歪度: } b_1' = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x'_i - \bar{x}')^3 / s'^3 = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^3 / s^3$$

$$\text{尖度: } b_2' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x'_i - \bar{x}')^4 / s'^4 - 3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^4 / s^4 - 3$$

となる。以上のように軸の対数化をすることによって、分布の平均と歪度が 0 になるような分布を理想分布として定義する。また以下では対数変換した分布形状と、そのモーメントについて比較検討する。

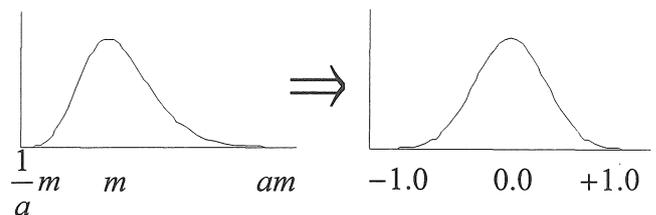


図 5.1: 軸の対数化による形状の変化

5. 2 軸の対数化による比較

4.2 節で用いた試料で軸の対数化の比較をおこなう。リニアな軸と対数軸でのモーメントの結果を表 5.1, 5.2 に示す。対数化した場合の標準偏差は、リニアな場合に関わらず 0.2 ~ 0.5 程度に分布していることがわかる。音声のピッチは男女で平均、標準偏差にそれぞれ約 2 倍の違いがあるといわれているので、中心を 0 とした対数化は、男女の違いなく標準偏差を統一的に比較や評価ができる一手法として使用できるのではないと思われる。

歪度は対数化することで正の方向にシフトしている。リニアな場合は全体的に 0.5 あたりに分布が多く集まっていたので、対数化すると 0 付近に集中することになる。しかし対数化は強制的に歪度を正の方向へシフトさせるので、リニアな軸で対称形であった分布はかえって対称性を失うことになる。試料Bなどの結果はその一例で歪度の絶対値は 0.115 から 0.293 へ大きく広がってしまう。このような場合、本研究では対数化して対称形となる分布を理想形としていることから、Bのような分布はもともと高周波数側へ偏っている分布である、という評価をすることになる。

この結果から分布形状について、多くの試料がリニアな軸の場合と比べて軸の対数化をおこなった方が左右対称な形状に近づいているのがわかる。また男女差による形状の違いなどは特に見られなく、全体的には理想形を対数軸において正規分布形であると仮定することが妥当であるように思われる。

表 5.1: 朗読音声のモーメント

試料	平均	標準偏差	歪度	尖度
A	104.91	28.719	-0.7191	0.2268
B	144.45	35.315	-0.1147	-0.9249
C	120.45	26.134	-0.4185	-0.6036
D	126.32	42.716	-0.6958	-0.1883
E	129.30	41.276	-0.6574	-0.0370
F	112.05	32.442	-0.5564	-0.4644
G	146.50	28.757	-0.3033	-0.3045
H	176.21	35.288	-0.5116	-0.4573
I	223.65	69.305	-0.5905	-0.1737
J	217.80	40.776	-0.4055	-0.5999

表 5.2: 軸の対数化をおこなったモーメント

試料	m	平均	標準偏差	歪度	尖度
A	101.18	0.000	0.3872	-0.0825	-0.4205
B	140.00	0.000	0.3661	0.2933	-0.8008
C	117.68	0.000	0.3118	-0.0265	-0.7723
D	119.50	0.000	0.4808	-0.0623	-0.6849
E	122.98	0.000	0.4585	0.0303	-0.5111
F	107.53	0.000	0.4151	-0.0221	-0.6795
G	143.68	0.000	0.2861	0.1414	-0.5248
H	172.80	0.000	0.2847	-0.1310	-0.6649
I	213.23	0.000	0.4485	0.0792	-0.5066
J	214.07	0.000	0.2680	-0.0858	-0.8840

6. 朗読条件の変化

感情の変化に対してピッチの分布にどのような変化が

あらわれるか調査するために、朗読条件を変化させた試料を用いてピッチの分析をおこなう。

パラメータについて、

1. 朗読速度
2. 音声パワー
3. 明瞭度

をそれぞれ標準に対して上下 2 段階ずつ作成して比較する。標準試料は通常の読み上げる速度で約 80 秒程度の試料で、朗読速度は標準に対しての時間比で求めている。音声パワーと明瞭度については数値から求めた正確な値ではなく、上下 2 段階にわけて作成している。明瞭度は語の明瞭性で、子音の発音の強弱に対応させている。

6.1 朗読速度の変化

モーメントと速度比との関係について、図 6.1 では平均との関係について示している。この図からわかるように、速度を速くした場合、ピッチ分布の平均が高くなるが、反対に速度を遅くした場合、ピッチの分布形状にはあまり変化しないことがわかる。速度の変化を起こすために発声と調音時間を変化させる必要があることから、速くするためには発声時の圧力の上昇が必要となり、結果としてピッチの上昇に繋がっているのではないかと予想できる。また、速度を遅くした場合では平均にあまり変化がみられないのは、速度を平均より遅くするには有声音の持続時間はほとんど変えずに、休止区間の無音時間を長くしているためだと推測される。

一方、速度比と歪度については、図から速度比 1.0 を中心に、歪度の絶対値に従って正の方向に偏っていくことがわかる。これは速度の変化によって平均よりも高い周波数側に分布が集中していくといえる。逆に無理をして通常の変化する速度を変えることは、ピッチの分布を理想分布から遠ざける結果になるということもできる。

尖度との関係について、発音速度の速さに従って尖度は減少するという関係が得られた。発音速度を遅くした場合はピッチの変動が少なくなり平均付近に偏ることで

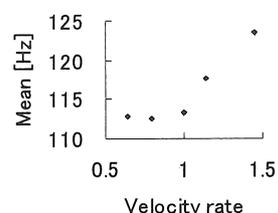


図 6.1: 平均—速度比

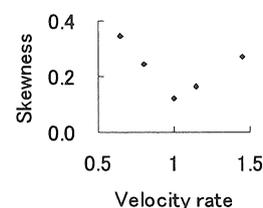


図 6.2: 歪度—速度比

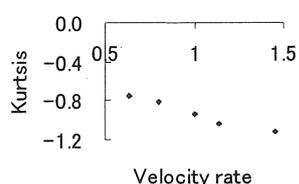


図 6.3: 尖度—速度比

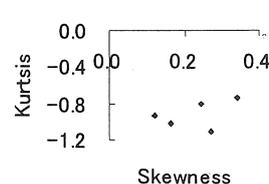


図 6.4: 尖度—歪度

尖りの度合いが大きくなったと考えられる。

朗読速度とピッチの分布形状についてまとめると、発音速度の増減によって対称形から右偏りにずれてゆき、尖りは速度増減に伴ってなだらかになっていく。また故意に発音速度を変化させることは分布形状を著しく変化させてしまう結果が得られた。

6. 2 音声パワーの変化

音声パワーの変化にともなう諸パラメータの変動について、図 6.5~6.8 に結果を示す。基本的には速度変化と同様の結果が多くみられる。強さと平均の関係については、圧力とピッチの関係から予想される妥当な結果が得られている。また、速度を変化させた時は 10Hz 程度であったがこれと比べるとピッチの平均が約 30Hz と大きく変化しているのがわかる。これは速度の変化に比べて、パワーの変化は大きな呼気圧力を必要とし、これがピッチに影響を与えるからだと考えられる。歪度、尖度とパワー比について、標準とした試料の値が大きはずれているが、それを除くと概ね速度変化での結果に類似している。歪度と尖度の関係性についても、標準値が大きはずれていることから、形状が変化しているということが推察できる。

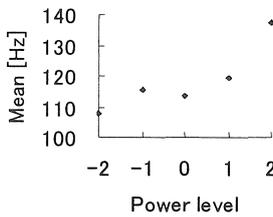


図 6.5: 平均-パワー

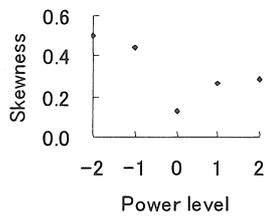


図 6.6: 歪度-パワー

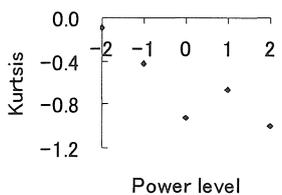


図 6.7: 尖度-パワー

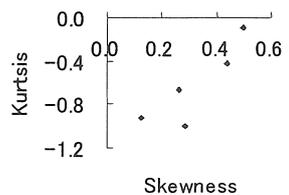


図 6.8: 尖度-歪度

6. 3 明瞭度の変化

明瞭度の変化について図 6.9~6.12 に結果を示す。図から明瞭度が上がるに従って、ピッチの平均が上昇しているのがわかる。この性質は速度の変化に類似している。つまり明瞭度を下げる方向では子音の発音をしただけなので、全体の発音速度や圧力は変化しない。逆に明瞭度を上げるためには短時間において子音の発音から母音の発音への調音変化と、一音ごとの発音消音の繰り返しが必要になるため、結果的に高い呼気圧力を必要とする。よってピッチ全体の平均が上昇したものと推測される。

歪度についてはあまり変化しない結果が得られた。しかし標準値が分布から大きくはずれていることから、形状に変化があったことが伺える。また歪度が大きな値で安定しているということは、分布形状がかなり右側(高周波数側)に偏っており、尚且つ対称性という面はほとんど変化していないということを示している。この点において、詳しい原因や性質の特定にはもう少し試料を増やす必要があると思われる。

尖度については、速度変化とは対照的に、明瞭度の変化にともなって大きくなっていく傾向がみられる。この傾向についても詳しいことはわからないが、明瞭度を一段階シフトした試料は平均の右側に特に分布が集中している形状になっている点など、形状と分布の広がり起因するのではないかと考えられる。

歪度と尖度の関係性について、速度変化やパワー変化で見られた関係性があまり見られないことから、分布の形状自体が大きく変化したことが予想される。実際、歪度はほとんど変化していないのに対して、尖度は広く分布している。明瞭度の変化は主に子音部分に影響を受けることから、語の開始時、終了時における急激なピッチの変化が、全体のピッチの分布形状に影響を大きく与えたということが考えられる。しかしこれも明確なメカニズムの裏付けがあるわけではないので、短時間変化やアクセントの変動など、試料をもっと詳しく調べる必要があると思われる。

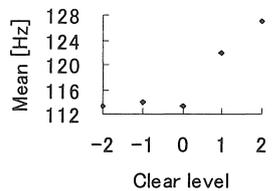


図 6.9: 平均-明瞭度

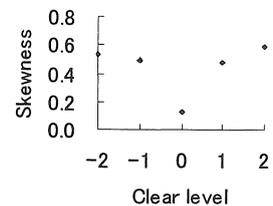


図 6.10: 歪度-明瞭度

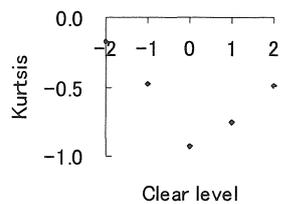


図 6.11: 尖度-明瞭度

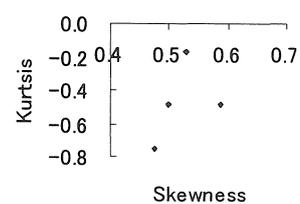


図 6.12: 尖度-歪度

7. まとめ

本研究は最初の出発点として、感情の変化が音声に与える影響という面について注目してきた。本研究ではその中でもピッチ周波数の時間分布に注目し、その分布形状についてモーメントを用いて評価することを試みた。また、分布形状がリニアな軸では対称形ではないことから対数軸の導入と、その平均をあらかじめ 0 にする方法について述べた。最後に感情の変化がピッチ分布に与える影響について実際の試料からその傾向を論じた。その

結果、感情の変化によってピッチの分布形状は大きく変動する可能性があることが示唆された。しかしピッチの分布形状は多くの条件から刻々と変化し、決して一定ではないことも同時に明らかにされた。この点において、現在のようなある程度の時間が経過した後の確定された分布形状についての議論であることにとどまらず、ピッチの短時間変動やパワーとの対応など、多くの視点からその変化を注視することが重要であると思われる。

参考文献

- 1) 古井 貞熙, デジタル音声処理, 1, 東海大学出版会, 1985
- 2) 古井 貞熙, 音響・音声工学, 123, 近代科学社, 1992
- 3) 半谷 猛, 音声のピッチ周波数の測定法に関する研究, 28-32, 愛知工業大学修士論文, 1997
- 4) 永田 靖, 入門 統計解析法, 5-19, 日科技連出版社, 1992
- 5) 永田 靖, 統計的方法のしくみ, 19,55-62, 日科技連出版社, 1996
- 6) 薩摩 順吉, 確率・統計, 48-49, 岩波書店, 1989

(受理 平成13年3月19日)